

Probabilità e Statistica nei Giochi a Premio

La probabilità applicata ai giochi a premio rappresenta uno dei campi più affascinanti e controintuitivi della matematica applicata. L'essere umano ha sviluppato euristiche cognitive che, pur essendo utili nella vita quotidiana, lo portano sistematicamente a valutazioni errate quando si confronta con eventi aleatori strutturati. Questo trattato esplora le fondamenta matematiche, le implicazioni psicologiche e le applicazioni pratiche della teoria della probabilità nei contesti ludici e nei giochi d'azzardo istituzionalizzati.

Fondamenti Teorici della Probabilità

La probabilità classica, così come definita da Laplace, si basa sul principio di equiprobabilità: se un esperimento può produrre n risultati ugualmente possibili e mutuamente esclusivi, e se k di questi risultati costituiscono l'evento A , allora la probabilità di A è k/n . Questa definizione apparentemente semplice nasconde complessità profonde quando applicata a sistemi reali.

La probabilità frequentista, invece, definisce la probabilità come il limite della frequenza relativa di un evento quando il numero di prove tende all'infinito. Questa interpretazione è particolarmente rilevante per i giochi a premio, dove le case da gioco e gli operatori di lotterie si affidano precisamente a questa convergenza per garantire i loro margini di profitto.

La probabilità bayesiana introduce invece il concetto di probabilità soggettiva, aggiornabile in base a nuove informazioni secondo il teorema di Bayes. Questa prospettiva è cruciale per comprendere problemi come quello di Monty Hall, dove l'informazione acquisita modifica razionalmente le nostre stime probabilistiche.

Il Problema di Monty Hall: Un Paradosso che Sfida l'Intuizione

Il problema di Monty Hall rappresenta probabilmente l'esempio più celebre di come l'intuizione umana possa essere drammaticamente fuorviante in contesti probabilistici. Derivato dal game show americano "Let's Make a Deal", condotto da Monty Hall, il problema è formulato così:

Un concorrente si trova di fronte a tre porte chiuse. Dietro una porta c'è un'automobile, dietro le altre due ci sono capre. Il concorrente sceglie una porta, diciamo la porta 1. Il conduttore, che sa cosa c'è dietro ogni porta, apre sempre una delle porte rimanenti che contiene una capra, ad esempio la porta 3. A questo punto il conduttore offre al concorrente la possibilità di mantenere la sua scelta iniziale o di cambiare e scegliere l'altra porta chiusa. La domanda è: conviene cambiare?

La risposta controintuitiva è che conviene sempre cambiare, poiché la probabilità di vincere passando alla porta rimasta chiusa è $2/3$, mentre mantenendo la scelta iniziale è solo $1/3$.

Analisi Matematica Rigorosa

Inizialmente, quando il concorrente sceglie la porta 1, la probabilità che l'auto sia dietro quella porta è $1/3$, mentre la probabilità che sia dietro la porta 2 o la porta 3 è complessivamente $2/3$. Questo è un fatto indiscutibile che deriva dalla simmetria del problema.

Il punto cruciale è che quando Monty Hall apre la porta 3 rivelando una capra, non sta compiendo un'azione casuale. Egli sa dove si trova l'automobile e apre deliberatamente una porta con una capra. Questa azione non fornisce alcuna nuova informazione sulla porta 1 (che mantiene la sua probabilità iniziale di $1/3$), ma concentra tutta la probabilità del gruppo "porte 2 e 3" sulla porta 2 rimasta chiusa.

Possiamo formalizzare questo attraverso il teorema di Bayes. Sia A l'evento "l'auto è dietro la porta 1" e B l'evento "Monty apre la porta 3". Vogliamo calcolare $P(A|B)$, la probabilità che l'auto sia dietro la porta 1 dato che Monty ha aperto la porta 3.

Per il teorema di Bayes: $P(A|B) = P(B|A) \times P(A) / P(B)$

Se l'auto è dietro la porta 1, Monty può scegliere di aprire indifferentemente la porta 2 o la porta 3, quindi $P(B|A) = 1/2$. La probabilità a priori è $P(A) = 1/3$. La probabilità totale che Monty apra la porta 3, $P(B)$, può essere calcolata considerando tutti i casi: se l'auto è dietro la porta 1 (probabilità $1/3$), Monty apre la porta 3 con probabilità $1/2$; se l'auto è dietro la porta 2 (probabilità $1/3$), Monty deve aprire la porta 3 con certezza; se l'auto è dietro la porta 3 (probabilità $1/3$), Monty non può aprire quella porta. Quindi $P(B) = 1/3 \times 1/2 + 1/3 \times 1 + 1/3 \times 0 = 1/6 + 1/3 = 1/2$.

Pertanto: $P(A|B) = (1/2 \times 1/3) / (1/2) = 1/3$

Analogamente, la probabilità che l'auto sia dietro la porta 2 dato che Monty ha aperto la porta 3 è $2/3$.

Estensioni e Variazioni

Il problema diventa ancora più interessante nelle sue variazioni. Se consideriamo n porte invece di tre, e dopo la scelta iniziale del concorrente Monty ne apre $n-2$ rivelando tutte capre, la probabilità di vincere cambiando diventa $(n-1)/n$. Con 100 porte, cambiare darebbe una probabilità di vittoria del 99%.

Un'altra variazione illuminante: se Monty aprisse una porta casualmente (senza sapere cosa c'è dietro) e per caso rivelasse una capra, allora cambiare o meno sarebbe indifferente, entrambe con probabilità $1/2$. Questo sottolinea come l'informazione non sia intrinseca nell'evento osservato, ma dipenda dal processo che lo ha generato.

Implicazioni Cognitive e Storiche

Quando Marilyn vos Savant pubblicò la soluzione corretta nella sua rubrica su Parade Magazine nel 1990, ricevette circa 10.000 lettere, molte da matematici e statistici

professionisti, che insistevano che la sua risposta fosse sbagliata. Questo episodio rivela quanto profondamente radicati siano certi bias cognitivi.

Il problema illustra diversi errori sistematici del pensiero probabilistico: l'incapacità di aggiornare correttamente le probabilità alla luce di nuove informazioni, la tendenza a ignorare il processo generativo dei dati, e la difficoltà nel distinguere tra caso e informazione strutturata.

Le Lotterie: Matematica dell'Improbabilità

Le lotterie rappresentano probabilmente la forma più diffusa e istituzionalizzata di gioco d'azzardo. La loro popolarità persiste nonostante siano, dal punto di vista matematico, tra le scommesse più sfavorevoli disponibili.

Strutture Probabilistiche delle Lotterie

Consideriamo una lotteria standard dove si devono scegliere k numeri corretti tra n disponibili (senza considerare l'ordine). Il numero totale di combinazioni possibili è dato dal coefficiente binomiale:

$$C(n,k) = n! / (k! \times (n-k)!)$$

Per il SuperEnalotto italiano, dove si devono indovinare 6 numeri su 90, le combinazioni possibili sono:

$$C(90,6) = 90! / (6! \times 84!) = 622.614.630$$

La probabilità di realizzare un "6" con una singola giocata è quindi circa 1 su 622 milioni. Per dare un senso intuitivo a questa probabilità: è più probabile essere colpiti da un fulmine più volte nella vita, essere attaccati da uno squalo in acque temperate, o trovare un quadrifoglio al primo tentativo ripetute volte.

Il Valore Atteso e il Margine della Casa

Il valore atteso di una scommessa è la somma dei possibili risultati, ciascuno moltiplicato per la sua probabilità. Per una lotteria equa, il valore atteso di un biglietto dovrebbe essere uguale al suo costo. In realtà, le lotterie sono strutturate per avere un valore atteso negativo per il giocatore.

Se un biglietto costa 1 euro e il montepremi totale distribuito è M euro (considerando tutti i premi, dal jackpot alle vincite minori), e il numero totale di combinazioni è N , il valore atteso per biglietto è approssimativamente M/N euro. Le lotterie statali tipicamente restituiscono tra il 50% e il 70% dell'incasso in premi, trattenendo il resto per costi operativi, tasse e profitti.

Nel caso del SuperEnalotto, assumendo un montepremi distribuito del 50% e un jackpot che parte da una cifra base, il valore atteso di una giocata da 1 euro è tipicamente intorno a 0,50-0,60 euro, rappresentando una perdita attesa del 40-50%.

Il Paradosso dei Jackpot Crescenti

Un fenomeno interessante si verifica quando il jackpot non viene vinto per molte estrazioni consecutive e raggiunge somme astronomiche. Matematicamente, potrebbe esistere un punto in cui il valore atteso di un biglietto supera il suo costo, rendendo teoricamente vantaggioso giocare.

Tuttavia, questa analisi è complicata da diversi fattori. Primo, quando il jackpot è molto alto, molte più persone giocano, aumentando drammaticamente la probabilità di dover dividere il premio con altri vincitori. Secondo, i premi di importo molto elevato sono tipicamente soggetti a tassazione significativa. Terzo, il valore soggettivo di somme molto grandi non scala linearmente (utilità marginale decrescente del denaro).

Strategie e Sistemi: L'Illusione del Controllo

Numerosi "sistemi" sono stati proposti nel corso dei decenni per aumentare le probabilità di vincita alle lotterie. Questi includono la scelta di numeri "ritardatari", l'uso di date significative, pattern geometrici sui moduli di giocata, o l'analisi statistica delle estrazioni precedenti.

Dal punto di vista matematico, se la lotteria è equa (ogni estrazione è indipendente e ogni numero ha la stessa probabilità), nessuna di queste strategie può modificare la probabilità di vittoria. Ogni combinazione di numeri ha esattamente la stessa probabilità di essere estratta.

Esiste però una considerazione strategica legittima: evitare combinazioni che molte altre persone potrebbero scegliere. Sequenze come 1-2-3-4-5-6, date di nascita (che limitano i numeri a 1-31), o pattern visivi sui moduli sono scelte relativamente comuni. Se si vince con una combinazione comune, il premio sarà diviso tra più vincitori. Quindi, pur non aumentando la probabilità di vincita, scegliere combinazioni "casuali" e non intuitive può massimizzare il premio atteso in caso di vittoria.

La Fallacia del Giocatore e l'Indipendenza degli Eventi

La fallacia del giocatore è la credenza errata che eventi passati influenzino la probabilità di eventi futuri in sequenze di prove indipendenti. Se un numero non è uscito da molte estrazioni, molti giocatori credono che sia "dovuto" e abbia maggiore probabilità di uscire. Questo è matematicamente falso: ogni estrazione è indipendente.

La probabilità che il numero 23 esca nella prossima estrazione è esattamente la stessa sia che sia uscito nell'ultima estrazione sia che non esca da 100 estrazioni. Il dado non ha memoria.

Paradossalmente, anche la credenza opposta (che numeri usciti di recente abbiano meno probabilità di riuscire, la "gambler's fallacy inversa") è ugualmente errata e basata sulla stessa incomprensione dell'indipendenza statistica.

Lotterie Istantanee e Gratta e Vinci

Le lotterie istantanee presentano una struttura probabilistica diversa. A differenza delle lotterie ad estrazione, dove ogni biglietto ha teoricamente la stessa probabilità iniziale, nei gratta e vinci esiste un numero finito prestabilito di biglietti vincenti in circolazione.

Struttura e Probabilità Dinamiche

Supponiamo che una serie di gratta e vinci abbia 10 milioni di biglietti stampati, di cui 100 vincono il primo premio. Inizialmente, la probabilità di acquistare un biglietto vincente il primo premio è $100/10.000.000 = 1/100.000$.

Tuttavia, man mano che i biglietti vengono venduti e i premi reclamati, queste probabilità cambiano. Se 5 milioni di biglietti sono stati venduti e tutti i 100 primi premi sono stati reclamati, la probabilità di vincere il primo premio con i biglietti rimanenti è zero. Viceversa, se solo 50 primi premi sono stati reclamati, la probabilità è ora $50/5.000.000 = 1/100.000$, invariata.

Alcune giurisdizioni richiedono agli operatori di rendere pubbliche queste informazioni (quanti premi di ciascuna categoria rimangono non reclamati), permettendo teoricamente strategie informate. Un giocatore razionale dovrebbe evitare serie dove i premi principali sono stati tutti reclamati ma molti biglietti rimangono in circolazione.

Il Rendimento Atteso

I gratta e vinci tipicamente hanno un rendimento (payout percentage) leggermente più alto delle lotterie ad estrazione, spesso intorno al 60-70%. Questo è in parte perché i costi di distribuzione sono più bassi e in parte perché la gratificazione immediata giustifica un prezzo premium.

Il design psicologico dei gratta e vinci è sofisticato: piccole vincite frequenti (che spesso coprono solo il costo del biglietto) creano l'illusione di "quasi vincere" e incoraggiano l'acquisto di ulteriori biglietti. Questo fenomeno, noto come "reinforcement parziale", è estremamente efficace nel mantenere il comportamento di gioco.

Comparazione con Altri Giochi d'Azzardo

Per contestualizzare le lotterie, è utile confrontare i loro margini della casa con altri giochi d'azzardo.

La roulette europea (con un solo zero) ha un margine della casa del 2,7%, molto più favorevole al giocatore rispetto alle lotterie. Il blackjack giocato con strategia ottimale può avere un margine inferiore all'1%. Le slot machine tipicamente hanno margini tra il 2% e il 15%, variabili ma generalmente molto migliori delle lotterie. Persino il Lotto tradizionale italiano, spesso criticato, ha un margine della casa intorno al 45%, comunque migliore del SuperEnalotto.

Le lotterie sono quindi tra i giochi d'azzardo meno favorevoli dal punto di vista puramente matematico. La loro popolarità persiste per ragioni che vanno oltre il calcolo razionale del valore atteso.

Psicologia dei Giochi a Premio

La Teoria del Prospetto e l'Avversione alle Perdite

La teoria del prospetto, sviluppata da Kahneman e Tversky, fornisce un quadro per comprendere perché le persone giocano alle lotterie nonostante il valore atteso negativo. Gli esseri umani non valutano le probabilità linearmente: sovrastimano sistematicamente le probabilità molto basse e sottostimano quelle alte.

Un evento con probabilità di 1 su 1 milione viene psicologicamente percepito come molto più probabile di quanto sia realmente. Questo "effetto possibilità" spiega perché le persone sono disposte a pagare per una chance, anche se infinitesimale, di vincere un premio che cambierebbe la loro vita.

Inoltre, la funzione di valore è concava per i guadagni (utilità marginale decrescente) ma convessa per le perdite, e più ripida per le perdite che per i guadagni equivalenti (avversione alle perdite). Perdere 1 euro nell'acquisto di un biglietto è percepito come una perdita minima, mentre la possibilità di vincere milioni ha un valore psicologico enorme, anche se la probabilità è quasi nulla.

Il Valore dell'Intrattenimento e del Sogno

Un'analisi puramente utilitaristica del gioco delle lotterie trascura il valore dell'esperienza stessa. L'acquisto di un biglietto non compra solo una probabilità di vincita, ma anche giorni di anticipazione, la possibilità di fantasticare su come si spenderebbero i milioni, e la partecipazione a un rituale sociale condiviso.

Se consideriamo questo "valore di intrattenimento", il costo effettivo del biglietto potrebbe essere giustificato anche con un valore atteso monetario negativo. Questo è simile al pagamento per qualsiasi forma di intrattenimento: si spende denaro per un'esperienza che ha valore soggettivo ma non ritorno monetario.

La Soglia di Accessibilità e la Tassazione Volontaria

Le lotterie sono state descritte come una "tassazione volontaria sui matematicamente ingenui". Tuttavia, offrono anche l'unica opportunità per persone con risorse limitate di accedere a ricchezze altrimenti irraggiungibili.

Per qualcuno con un reddito modesto, accumulare legalmente milioni di euro attraverso il risparmio è virtualmente impossibile. La lotteria, per quanto iniqua matematicamente, rappresenta l'unica via di accesso a un cambiamento radicale della propria condizione economica. Questo spiega perché le lotterie sono proporzionalmente più popolari tra le classi socioeconomiche più basse, un fenomeno che solleva questioni etiche significative.

Aspetti Sociali ed Etici

Regressività e Giustizia Sociale

Numerosi studi empirici hanno dimostrato che le lotterie sono regressive: le persone con redditi più bassi spendono una proporzione maggiore del loro reddito in biglietti della lotteria rispetto a quelle con redditi più alti. Questo solleva questioni etiche: è appropriato per uno stato promuovere attivamente un'attività che trasferisce ricchezza dai poveri ai ricchi (considerando che i proventi vanno spesso a servizi utilizzati proporzionalmente di più dalle classi medie e alte)?

D'altra parte, i proventi delle lotterie statali finanziano spesso progetti socialmente benefici: istruzione, cultura, sanità. Si crea così un dilemma morale: è giustificabile un male minore (lo sfruttamento delle vulnerabilità cognitive delle persone meno istruite) per finanziare beni maggiori?

Gioco Problematico e Dipendenza

Sebbene le lotterie siano generalmente considerate meno problematiche di altre forme di gioco d'azzardo (per via della bassa frequenza delle opportunità di gioco e dei limiti naturali alla spesa), possono comunque contribuire a comportamenti di gioco patologico.

La disponibilità ubiqua, la normalizzazione sociale, e la promozione aggressiva possono portare alcuni individui a spendere somme irresponsabili. I meccanismi di "quasi vincita" nelle lotterie istantanee possono essere particolarmente insidiosi, creando l'illusione di controllo e competenza dove esiste solo caso puro.

Strategie di Gioco Razionali e Irrazionali

La Strategia del Sindacato

Una strategia matematicamente sensata è quella dei sindacati di gioco, dove gruppi di persone mettono in comune le loro giocate. Questo aumenta il numero di combinazioni giocate (e quindi la probabilità di vincita) pur mantenendo il costo per individuo accessibile.

Se 100 persone mettono 1 euro ciascuna, possono giocare 100 combinazioni invece di una. La probabilità di vincita del gruppo diventa 100 volte maggiore, anche se il premio eventuale sarebbe diviso tra 100. Dal punto di vista del valore atteso, questo non cambia nulla (è ancora negativo), ma riduce la varianza: invece di avere una probabilità infinitesimale di vincere molto e un'altissima probabilità di perdere poco, si ha una probabilità leggermente meno infinitesimale di vincere un importo moderato.

Questa strategia riflette una preferenza per la riduzione del rischio piuttosto che per la massimizzazione del valore atteso, coerente con l'avversione al rischio tipica degli esseri umani.

L'Approccio del Limite di Bilancio

Una strategia di gestione del rischio ragionevole è stabilire un limite rigido di spesa per le lotterie, trattandolo come budget per intrattenimento piuttosto che come investimento. Spendere 50 euro all'anno in lotterie è paragonabile a spendere quella somma per andare al cinema: si acquista un'esperienza, non un'aspettativa di ritorno finanziario.

Il problema sorge quando le persone spendono più di quanto possono permettersi, guidati dalla fallacia che la prossima giocata potrebbe essere quella vincente, o dall'escalation dell'impegno (avendo già speso molto, sentono di dover continuare per "recuperare").

Matematica Avanzata e Anomalie Statistiche

La Convergenza della Legge dei Grandi Numeri

La legge dei grandi numeri garantisce che, con un numero sufficientemente grande di prove, la frequenza relativa di un evento converge alla sua probabilità teorica. Questo è il principio su cui si basano i casinò e le lotterie per garantire i loro profitti: nel breve termine possono pagare grandi vincite, ma nel lungo termine la matematica assicura il loro margine.

Per un giocatore individuale, tuttavia, la legge dei grandi numeri lavora contro di lui: giocare ripetutamente aumenta la certezza di perdere denaro pari al margine della casa moltiplicato per il numero totale di giocate.

Eventi Rari e Code Grasse

Le distribuzioni delle vincite nelle lotterie hanno "code grasse" (fat tails): la maggior parte dei risultati sono piccole perdite, ma esistono risultati estremi (jackpot) con probabilità infinitesimali. Questo contrasta con distribuzioni normali dove gli eventi estremi sono estremamente rari.

La presenza di questi eventi estremi, anche se rarissimi, ha effetti psicologici e economici sproporzionati. Le storie di vincitori diventano parte della cultura popolare, alimentando la speranza in modi che non sarebbero giustificati dalla pura analisi probabilistica.

Teoremi di Impossibilità e Limiti dell'Ottimizzazione

Esistono teoremi matematici che stabiliscono limiti fondamentali a quanto bene si può fare in certi giochi. Per le lotterie equamente estratte, nessun sistema di selezione dei numeri può migliorare le probabilità di vincita. Questo è una conseguenza diretta dell'indipendenza e dell'equiprobabilità delle estrazioni.

Tuttavia, nelle lotterie dove i premi sono parimutuel (divisi tra tutti i vincitori), esiste spazio per strategie di ottimizzazione del premio atteso attraverso la scelta di combinazioni impopolari, come discusso precedentemente.

Formalizzazione Matematica Rigorosa

1. Fondamenti Assiomatici della Teoria della Probabilità

1.1 Gli Assiomi di Kolmogorov

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità, dove:

- Ω è lo spazio campionario (insieme di tutti i possibili risultati)
- $\mathcal{F}$ è una σ -algebra di eventi (sottoinsiemi di Ω)
- P è una misura di probabilità che soddisfa:

Assioma 1 (Non-negatività): Per ogni evento $A \in \mathcal{F}$: $P(A) \geq 0$

Assioma 2 (Normalizzazione): $P(\Omega) = 1$

Assioma 3 (σ -additività): Per ogni sequenza di eventi mutuamente esclusivi $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Da questi assiomi derivano proprietà fondamentali:

Probabilità del complemento: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Probabilità dell'unione (formula di inclusione-esclusione): $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Per n eventi: $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$

1.2 Probabilità Condizionata e Indipendenza

Definizione (Probabilità condizionata): Per eventi A, B con $P(B) > 0$: $P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$

Teorema della probabilità totale: Se $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ è una partizione di Ω , allora: $P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)$

Teorema di Bayes: $P(B_i|A) = [P(A|B_i) \cdot P(B_i)] / [\sum_{i=1}^n P(A|B_i) \cdot P(B_i)]$

Definizione (Indipendenza): Due eventi A e B sono indipendenti se e solo se: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Equivalentemente (se $P(B) > 0$): $P(A|B) = P(A)$

Eventi $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono mutuamente indipendenti se per ogni sottoinsieme $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$: $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

2. Il Problema di Monty Hall: Analisi Formale Completa

2.1 Formalizzazione del Problema

Spazio campionario: $\Omega = \{(i, j, k) : i, j, k \in \{1, 2, 3\}, i \neq j, i \neq k\}$

dove:

- i = posizione dell'automobile
- j = porta scelta dal concorrente
- k = porta aperta da Monty

Assunzioni:

1. L'automobile è posizionata uniformemente a caso: $P(\text{auto in porta } i) = 1/3$ per $i = 1, 2, 3$
2. Il concorrente sceglie uniformemente a caso (senza perdita di generalità, supponiamo scelga la porta 1)
3. Monty conosce la posizione dell'automobile
4. Monty apre sempre una porta con una capra diversa da quella scelta dal concorrente
5. Se Monty ha una scelta (concorrente ha scelto l'automobile), sceglie equiprobabilmente

2.2 Calcolo Formale delle Probabilità

Sia:

- A_1 = "auto dietro porta 1"
- A_2 = "auto dietro porta 2"
- A_3 = "auto dietro porta 3"
- M_2 = "Monty apre porta 2"
- M_3 = "Monty apre porta 3"

Probabilità a priori: $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$

Probabilità condizionate di apertura di Monty: Supponiamo il concorrente scelga la porta 1.

$P(M_3|A_1) = 1/2$ (Monty può scegliere tra porte 2 e 3) $P(M_3|A_2) = 1$ (Monty deve aprire porta 3)
 $P(M_3|A_3) = 0$ (Monty non può aprire porta 3)

$P(M_2|A_1) = 1/2$ $P(M_2|A_2) = 0$ $P(M_2|A_3) = 1$

Probabilità totale che Monty apra porta 3: $P(M_3) = P(M_3|A_1) \cdot P(A_1) + P(M_3|A_2) \cdot P(A_2) + P(M_3|A_3) \cdot P(A_3)$
 $P(M_3) = (1/2) \cdot (1/3) + 1 \cdot (1/3) + 0 \cdot (1/3)$ $P(M_3) = 1/6 + 1/3 + 0 = 1/2$

Applicazione del Teorema di Bayes: Dato che Monty ha aperto porta 3:

$P(A_1|M_3) = P(M_3|A_1) \cdot P(A_1) / P(M_3)$ $P(A_1|M_3) = (1/2) \cdot (1/3) / (1/2) = 1/3$

$P(A_2|M_3) = P(M_3|A_2) \cdot P(A_2) / P(M_3)$ $P(A_2|M_3) = 1 \cdot (1/3) / (1/2) = 2/3$

$P(A_3|M_3) = P(M_3|A_3) \cdot P(A_3) / P(M_3)$ $P(A_3|M_3) = 0 \cdot (1/3) / (1/2) = 0$

Conclusione: La probabilità di vincere mantenendo la scelta iniziale (porta 1) è $P(A_1|M_3) = 1/3$ La probabilità di vincere cambiando (porta 2) è $P(A_2|M_3) = 2/3$

2.3 Generalizzazione con n Porte

Teorema: In un gioco di Monty Hall con n porte, dove il concorrente sceglie una porta, Monty apre n-2 porte con capre, la probabilità di vincere cambiando è $(n-1)/n$.

Dimostrazione: Sia C l'evento "il concorrente ha scelto l'automobile" e M l'evento "Monty ha aperto n-2 porte specifiche mostrando capre".

$P(C) = 1/n$ (probabilità a priori di aver scelto l'automobile)

$P(M|C)$ = numero di modi di scegliere n-2 porte da n-1 porte con capre / numero totale di modi
Per il concorrente che ha scelto l'automobile, Monty può scegliere n-2 porte da n-1:
 $P(M|C) = C(n-1, n-2) / \text{possibili scelte di Monty}$

Se il concorrente non ha scelto l'automobile (evento C^c), allora:

- Ci sono n-1 possibili posizioni per l'automobile (le porte non scelte)
- Per ogni posizione, Monty deve aprire esattamente le n-2 porte che non contengono né l'automobile né la scelta del concorrente

Per simmetria e considerando che Monty agisce deterministicamente quando il concorrente sbaglia: $P(M|C^c)$ dipende dalla configurazione specifica

Utilizzando il ragionamento diretto:

- Probabilità iniziale che l'automobile sia dietro la porta scelta: $1/n$
- Probabilità iniziale che l'automobile sia dietro una delle altre n-1 porte: $(n-1)/n$
- L'informazione di Monty non cambia la probabilità della porta inizialmente scelta
- La probabilità concentrata sulle altre porte si redistribuisce sulla porta rimanente

Quindi: $P(\text{vincere cambiando}) = (n-1)/n$ ■

Esempio numerico:

- $n = 3$: $P(\text{vincere cambiando}) = 2/3 \approx 0.667$
- $n = 10$: $P(\text{vincere cambiando}) = 9/10 = 0.9$
- $n = 100$: $P(\text{vincere cambiando}) = 99/100 = 0.99$

2.4 Variante: Monty Ignorante

Scenario alternativo: Monty apre una porta a caso (senza conoscere la posizione dell'automobile) e per caso rivela una capra.

Sia R = "Monty rivela casualmente una capra"

$P(R|A_1) = 2/2 = 1$ (entrambe le porte rimanenti hanno capre) $P(R|A_2) = 1/2$ (Monty deve casualmente scegliere la porta 3 e non la porta 2) $P(R|A_3) = 1/2$ (Monty deve casualmente scegliere la porta 2 e non la porta 3)

Se Monty apre casualmente la porta 3 e rivela una capra:

$$P(R_3) = P(R_3|A_1) \cdot P(A_1) + P(R_3|A_2) \cdot P(A_2) + P(R_3|A_3) \cdot P(A_3) \quad P(R_3) = 1 \cdot (1/3) + 1 \cdot (1/3) + 0 \cdot (1/3) = 2/3$$

$$P(A_1|R_3) = P(R_3|A_1) \cdot P(A_1) / P(R_3) = 1 \cdot (1/3) / (2/3) = 1/2 \quad P(A_2|R_3) = P(R_3|A_2) \cdot P(A_2) / P(R_3) = 1 \cdot (1/3) / (2/3) = 1/2$$

In questo caso, cambiare o mantenere è indifferente (entrambi 1/2).

2.5 Formulazione mediante Catene di Markov

Il problema può essere modellato come una catena di Markov con stati: $S = \{S_1, S_2, S_3\}$ rappresentanti "l'automobile è dietro la porta i"

Matrice di transizione (nessun cambio): $P_{\text{mantieni}} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$

Matrice di transizione (con cambio dopo l'informazione di Monty): Quando il concorrente sceglie porta 1 e Monty apre porta 3: $P_{\text{cambia}|M_3} = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$

Moltiplicando per la distribuzione a priori $\pi_0 = [1/3, 1/3, 1/3]$: $\pi_{1_mantieni} = \pi_0 \cdot P_{\text{mantieni}} = [1/3, 1/3, 1/3]$ Ma condizionando su M_3 : $\pi_{1_mantieni} = [1/3, 2/3, 0]$ proiettato su $\{1,2\} \rightarrow [1/3, 2/3]$

3. Analisi Combinatoria delle Lotterie

3.1 Coefficienti Binomiali e Combinazioni

Il numero di modi per scegliere k oggetti da n oggetti (senza considerare l'ordine) è:

$$C(n,k) = n! / (k!(n-k)!) = (n \text{ choose } k)$$

Proprietà:

1. $C(n,k) = C(n, n-k)$ (simmetria)
2. $C(n,k) = C(n-1,k-1) + C(n-1,k)$ (identità di Pascal)
3. $\sum_{k=0}^n C(n,k) = 2^n$
4. $\sum_{k=0}^n (-1)^k C(n,k) = 0$

3.2 Lotteria Standard: Calcoli Esatti

Configurazione tipica: Scegliere k numeri da n disponibili

$$\text{SuperEnalotto italiano: } n=90, \quad k=6 \quad C(90,6) = 90! / (6! \cdot 84!) = (90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85) / (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 622,614,630$$

EuroMillions: $n=50$, $k=5$ (numeri principali) $C(50,5) = \frac{50!}{(5! \cdot 45!)} = \frac{(50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46)}{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)} = 2,118,760$

Più 2 numeri da 12 stelle: $C(12,2) = 66$ Totale combinazioni: $2,118,760 \times 66 = 139,838,160$

Powerball (USA): $n=69$, $k=5$ più 1 Powerball da 26 $C(69,5) = 11,238,513$ Totale: $11,238,513 \times 26 = 292,201,338$

3.3 Probabilità di Vincite Multiple

Probabilità di fare "k" corretti su k richiesti:

In una lotteria dove si scelgono k numeri da n, e vengono estratti m numeri vincenti:

$$P(\text{esattamente } j \text{ corretti}) = [C(m,j) \cdot C(n-m, k-j)] / C(n,k)$$

dove:

- $C(m,j)$ = modi di scegliere j numeri corretti tra gli m vincenti
- $C(n-m, k-j)$ = modi di scegliere i restanti k-j numeri sbagliati
- $C(n,k)$ = totale combinazioni possibili

Esempio SuperEnalotto ($n=90$, $k=6$, $m=6$):

$$P(6 \text{ corretti}) = [C(6,6) \cdot C(84,0)] / C(90,6) = 1 / 622,614,630 \approx 1.606 \times 10^{-9}$$

$$P(5 \text{ corretti}) = [C(6,5) \cdot C(84,1)] / C(90,6) = (6 \cdot 84) / 622,614,630 = 504 / 622,614,630 \approx 8.095 \times 10^{-7}$$

$$P(4 \text{ corretti}) = [C(6,4) \cdot C(84,2)] / C(90,6) = [15 \cdot 3486] / 622,614,630 = 52,290 / 622,614,630 \approx 8.398 \times 10^{-5}$$

$$P(3 \text{ corretti}) = [C(6,3) \cdot C(84,3)] / C(90,6) = [20 \cdot 95,284] / 622,614,630 = 1,905,680 / 622,614,630 \approx 0.00306$$

3.4 Distribuzione Ipergeometrica

La distribuzione del numero di successi in un campionamento senza reinserimento segue una distribuzione ipergeometrica:

$$\text{Se } X = \text{numero di numeri corretti, allora: } P(X = j) = [C(m,j) \cdot C(N-m, n-j)] / C(N,n)$$

dove:

- N = totale numeri disponibili
- m = numeri estratti (vincenti)
- n = numeri giocati
- j = numeri corretti

Valore atteso: $E[X] = n \cdot (m/N)$

Varianza: $\text{Var}(X) = n \cdot (m/N) \cdot (1 - m/N) \cdot (N-n)/(N-1)$

Per il SuperEnalotto con una singola giocata ($n=6$, $m=6$, $N=90$): $E[X] = 6 \cdot (6/90) = 0.4$
 $\text{Var}(X) = 6 \cdot (6/90) \cdot (84/90) \cdot (84/89) \approx 0.368$

4. Valore Atteso e Teoria delle Decisioni

4.1 Definizione Formale del Valore Atteso

Per una variabile aleatoria discreta X che assume valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ con probabilità $p_1, p_2, \dots, p_n$:

$$E[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$$

Proprietà fondamentali:

1. Linearità: $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$
2. Per variabili indipendenti: $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$
3. Legge dell'attesa iterata: $E[E[X|Y]] = E[X]$

4.2 Valore Atteso di una Lotteria

Sia V la vincita netta (vincita - costo del biglietto) e G_i le possibili categorie di vincita con premi P_i e probabilità p_i :

$$E[V] = \sum_{i=1}^k (P_i - C) \cdot p_i + (-C) \cdot p_0$$

dove:

- C = costo del biglietto
- p_0 = probabilità di non vincere nulla = $1 - \sum_{i=1}^k p_i$

Semplificando: $E[V] = \sum_{i=1}^k P_i \cdot p_i - C$

Esempio numerico SuperEnalotto: Assumendo:

- $C = 1 \text{ €}$
- $P_6 = 100,000,000 \text{ €}$ (6 numeri), $p_6 = 1/622,614,630$
- $P_5 = 50,000 \text{ €}$ (5 numeri), $p_5 \approx 8.095 \times 10^{-7}$
- $P_4 = 500 \text{ €}$ (4 numeri), $p_4 \approx 8.398 \times 10^{-5}$
- $P_3 = 25 \text{ €}$ (3 numeri), $p_3 \approx 0.00306$

$$E[V] = 100,000,000 \cdot (1/622,614,630) + 50,000 \cdot (8.095 \times 10^{-7}) + 500 \cdot (8.398 \times 10^{-5}) + 25 \cdot 0.00306 - 1$$

$$E[V] \approx 0.1606 + 0.0405 + 0.0420 + 0.0765 - 1 \quad E[V] \approx 0.320 - 1 = -0.680 \text{ €}$$

La perdita attesa per biglietto è circa 0.68 €, cioè un rendimento del 32%.

4.3 Margine della Casa (House Edge)

Il margine della casa è definito come:

$$h = (E[\text{perdita del giocatore}]) / (\text{somma scommessa}) \quad h = -E[V] / C$$

Per l'esempio sopra: $h = 0.680 / 1 = 0.68 = 68\%$

Il **payout percentage** (percentuale di ritorno): $r = 1 - h = 0.32 = 32\%$

4.4 Varianza e Deviazione Standard

La varianza misura la dispersione dei risultati:

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Per una lotteria con risultati discreti: $\text{Var}(V) = \sum_i (P_i - C - E[V])^2 \cdot p_i + (0 - C - E[V])^2 \cdot p_0$

La deviazione standard: $\sigma = \sqrt{\text{Var}(V)}$

Per il SuperEnalotto: $\text{Var}(V) \approx (100,000,000 - 1 + 0.68)^2 \cdot (1/622,614,630) + \text{altri termini molto minori} + (-1 + 0.68)^2 \cdot 0.9969\dots$

$$\approx (10^8)^2 \cdot (1.606 \times 10^{-9}) \approx 16,060$$

$$\sigma \approx \sqrt{16,060} \approx 126.7 \text{ €}$$

Questo mostra l'enorme varianza: il valore atteso è -0.68€ ma la deviazione standard è 126.7€.

4.5 Coefficiente di Variazione

Il coefficiente di variazione normalizza la variabilità:

$$CV = \sigma / |E[V]| \approx 126.7 / 0.68 \approx 186$$

Un CV così alto indica estrema volatilità relativa al valore atteso.

5. Jackpot Progressivi e Valore Atteso Variabile

5.1 Modello del Jackpot Crescente

Sia $J(t)$ il jackpot al tempo t : $J(t+1) = J(t) + \alpha \cdot R(t) - W(t)$

dove:

- $R(t)$ = ricavi dalle vendite al tempo t
- α = frazione dei ricavi aggiunta al jackpot (tipicamente 0.3-0.5)
- $W(t)$ = vincite pagate al tempo t

5.2 Condizione di Valore Atteso Positivo

Il valore atteso diventa positivo quando:

$$E[V] > 0 \quad \sum_i P_i \cdot p_i - C > 0$$

Per il jackpot principale: $J \cdot p_{\text{jackpot}} + \sum_{i=2}^k P_i \cdot p_i > C$

$$J > [C - \sum_{i=2}^k P_i \cdot p_i] / p_{\text{jackpot}}$$

Chiamiamo J^* questo valore critico.

Per il SuperEnalotto: $J^* = [1 - (0.0405 + 0.0420 + 0.0765)] / (1/622,614,630)$ $J^* = [1 - 0.159] / (1.606 \times 10^{-9})$ $J^* \approx 0.841 / (1.606 \times 10^{-9})$ $J^* \approx 524$ milioni di euro

Teoricamente, con un jackpot superiore a 524 milioni (senza considerare tasse e divisioni), il valore atteso diventa positivo.

5.3 Effetto della Condivisione del Premio

Se n giocatori vincono simultaneamente, il premio è diviso. La probabilità che esattamente k giocatori vincano, dato un totale di N giocatori con giocate indipendenti:

$$P(k \text{ vincitori} \mid N \text{ giocatori}) = C(N, k) \cdot p^k \cdot (1-p)^{(N-k)}$$

dove p è la probabilità di vincita per singola giocata.

Per N grande e p piccolo, questa distribuzione si approssima a una Poissoniana:

$$P(k \text{ vincitori}) \approx (\lambda^k / k!) \cdot e^{(-\lambda)}$$

dove $\lambda = N \cdot p$ è il numero atteso di vincitori.

Il valore atteso del premio (considerando divisione):

$$E[\text{premio per vincitore}] = J \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1/k) \cdot P(k \text{ vincitori}) = J \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1/k) \cdot (\lambda^k / k!) \cdot e^{(-\lambda)} \\ = (J/\lambda) \cdot e^{(-\lambda)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda^k / (k-1)!) = (J/\lambda) \cdot e^{(-\lambda)} \cdot e^{\lambda} \cdot [e^{\lambda} - 1]/\lambda \text{ (dopo manipolazioni)}$$

Per λ piccolo (pochi giocatori): $E[\text{premio per vincitore}] \approx J$

Per λ grande (molti giocatori quando il jackpot è alto): $E[\text{premio per vincitore}] < J$ significativamente

5.4 Paradosso di Parrondo

In teoria, strategie che sono perdenti individualmente possono diventare vincenti se alternate. Tuttavia, per le lotterie questo non si applica perché ogni estrazione è indipendente e il valore atteso è additivo:

$$E[V_{\text{totale}}] = \sum_i E[V_i]$$

Se $E[V_t] < 0$ per ogni t , allora $E[V_{\text{totale}}] < 0$.

6. Leggi dei Grandi Numeri e Teoremi Limite

6.1 Legge Debole dei Grandi Numeri (WLLN)

Teorema (Chebyshev): Sia $X_1, X_2, \dots, X_n$ una sequenza di variabili aleatorie i.i.d. con media μ e varianza finita σ^2 . Sia $\bar{X}_n = (1/n)\sum_{i=1}^n X_i$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \sigma^2 / (n \cdot \varepsilon^2)$$

che tende a 0 per $n \rightarrow \infty$.

Implicazioni per le lotterie: Se un giocatore gioca n volte indipendentemente, la perdita media per giocata converge al valore atteso negativo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - E[V]| < \varepsilon) = 1$$

Quindi, giocando ripetutamente, si è virtualmente certi di perdere circa $n \cdot |E[V]|$.

6.2 Legge Forte dei Grandi Numeri (SLLN)

Teorema (Kolmogorov): Sia $X_1, X_2, \dots$ una sequenza di v.a. i.i.d. con $E[|X_1|] < \infty$. Allora:

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu) = 1$$

La convergenza è quasi certa (a.s.), non solo in probabilità.

6.3 Teorema del Limite Centrale

Teorema: Sia $X_1, X_2, \dots, X_n$ i.i.d. con media μ e varianza σ^2 . Allora:

$$(\bar{X}_n - \mu) / (\sigma / \sqrt{n}) \xrightarrow{d} N(0,1)$$

dove $N(0,1)$ è la distribuzione normale standard.

Applicazione: Dopo n giocate, la perdita totale $S_n = \sum_{i=1}^n V_i$ si distribuisce approssimativamente come:

$$S_n \sim N(n \cdot E[V], n \cdot \text{Var}(V))$$

La probabilità di essere in profitto dopo n giocate:

$$P(S_n > 0) = P((S_n - n \cdot E[V]) / \sqrt{n \cdot \text{Var}(V)} > -n \cdot E[V] / \sqrt{n \cdot \text{Var}(V)}) \approx \Phi(\sqrt{n} \cdot |E[V]| / \sigma)$$

dove Φ è la funzione di distribuzione cumulativa normale standard.

Poiché $E[V] < 0$: $P(S_n > 0) \approx \Phi(-\sqrt{n} \cdot |E[V]| / \sigma) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$

Esempio numerico: SuperEnalotto con $E[V] = -0.68$, $\sigma = 126.7$:

Dopo 100 giocate: $P(S_{100} > 0) \approx \Phi(-\sqrt{100} \cdot 0.68/126.7) = \Phi(-0.054) \approx 0.478$

Dopo 1000 giocate: $P(S_{1000} > 0) \approx \Phi(-\sqrt{1000} \cdot 0.68/126.7) = \Phi(-0.170) \approx 0.433$

Dopo 10000 giocate: $P(S_{10000} > 0) \approx \Phi(-\sqrt{10000} \cdot 0.68/126.7) = \Phi(-0.537) \approx 0.296$

L'alta varianza rende possibile essere in profitto anche dopo molte giocate, ma la probabilità diminuisce con $\sqrt{n}$.

7. Teoria dell'Utilità e Paradosso di San Pietroburgo

7.1 Funzione di Utilità

Gli agenti razionali non massimizzano il valore atteso monetario ma l'utilità attesa. Una funzione di utilità $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa tipicamente:

1. $U'(x) > 0$ (monotonia: più denaro è meglio)
2. $U''(x) < 0$ (concavità: utilità marginale decrescente)

Funzioni di utilità comuni:

Utilità logaritmica: $U(x) = \ln(x)$ per $x > 0$

Utilità potenza (CRRA - Constant Relative Risk Aversion): $U(x) = (x^{1-\gamma} - 1)/(1-\gamma)$ per $\gamma > 0, \gamma \neq 1$

dove γ è il coefficiente di avversione al rischio relativo.

Utilità esponenziale (CARA - Constant Absolute Risk Aversion): $U(x) = -e^{-\alpha x} / \alpha$

dove $\alpha > 0$ è il coefficiente di avversione al rischio assoluto.

7.2 Utilità Attesa

Un agente razionale massimizza l'utilità attesa:

$$EU = \sum_i U(W + V_i) \cdot p_i$$

dove W è la ricchezza iniziale e V_i sono i possibili risultati della scommessa.

Teorema (Equivalente di Certezza): L'equivalente di certezza CE di una lotteria è l'importo certo per cui un agente è indifferente:

$$U(W + CE) = EU$$

Per utilità concava: $CE < E[V]$ (premio di rischio positivo)

7.3 Premio di Rischio

Il premio di rischio π è definito da:

$$U(W + E[V] - \pi) = E[U(W + V)]$$

Per piccole scommesse e utilità $U(x) \approx U(W) + U'(W)(x-W) + (1/2)U''(W)(x-W)^2$:

$$\pi \approx -(1/2) \cdot U''(W)/U'(W) \cdot \text{Var}(V) \quad \pi \approx (1/2) \cdot A(W) \cdot \text{Var}(V)$$

dove $A(W) = -U''(W)/U'(W)$ è il coefficiente di Arrow-Pratt di avversione al rischio assoluto.

Per lotterie: $\text{Var}(V)$ è enorme, quindi anche con piccola avversione al rischio, il premio di rischio può essere sostanziale.

7.4 Paradosso di San Pietroburgo

Gioco di San Pietroburgo: Si lancia una moneta finché non esce testa. Se esce testa al lancio n , si vincono 2^n euro.

$$P(n \text{ lanci}) = (1/2)^n$$

$$\text{Valore atteso: } E[V] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (1/2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Il valore atteso è infinito, ma nessuna persona razionale pagherebbe una somma illimitata per giocare.

Risoluzione (Bernoulli): Con utilità logaritmica $U(x) = \ln(x)$:

$$EU = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(2^n) \cdot (1/2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \ln(2) \cdot (1/2)^n$$

Questa è una serie convergente: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^n = x/(1-x)^2$ per $|x| < 1$

$$EU = \ln(2) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (1/2)^n = \ln(2) \cdot (1/2)/(1/2)^2 = 2 \cdot \ln(2) \approx 1.386$$

L'utilità attesa è finita, risolvendo il paradosso.

8. Fallacia del Giocatore e Indipendenza Stocastica

8.1 Formalizzazione dell'Indipendenza

Eventi $X_1, X_2, \dots, X_n$ sono stocasticamente indipendenti se per ogni sottoinsieme e ogni scelta di valori:

$$P(X_{\{i_1\}} = x_1, \dots, X_{\{i_n\}} = x_n) = P(X_{\{i_1\}} = x_1) \cdot \dots \cdot P(X_{\{i_n\}} = x_n)$$

$$\text{Conseguenza: } P(X_{n+1} = x \mid X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x)$$

La storia non influenza il futuro.

8.2 Processi di Bernoulli

Una sequenza di lanci di lotteria costituisce un processo di Bernoulli: prove indipendenti con probabilità costante p di successo.

Sia N_n = numero di successi in n prove. Allora:

$$N_n \sim \text{Binomiale}(n, p) \quad P(N_n = k) = C(n, k) \cdot p^k \cdot (1-p)^{(n-k)}$$

$$E[N_n] = n \cdot p \quad \text{Var}(N_n) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

8.3 Tempi di Attesa

Sia T = numero di prove fino al primo successo (distribuzione geometrica):

$$P(T = k) = (1-p)^{(k-1)} \cdot p \quad \text{per } k = 1, 2, 3, \dots$$

$$E[T] = 1/p \quad \text{Var}(T) = (1-p)/p^2$$

Proprietà di assenza di memoria: $P(T > n+m \mid T > n) = P(T > m)$

Per il SuperEnalotto: $p = 1/622,614,630$ $E[T] = 622,614,630$ giocate

Giocando una volta a settimana: $E[\text{tempo}] = 622,614,630$ settimane $\approx 11,973,358$ anni

8.4 Legge dell'Arcoseno

Teorema (Legge dell'arcoseno di Lévy): In un random walk simmetrico, la proporzione di tempo trascorsa in territorio positivo converge in distribuzione a una variabile con densità:

$$f(x) = 1/(\pi\sqrt{x(1-x)}) \quad \text{per } x \in (0,1)$$

Questo implica che è più probabile che un giocatore trascorra quasi tutto il tempo in perdita o quasi tutto in guadagno, piuttosto che oscillare equamente.

9. Strategie Ottimali e Criteri di Kelly

9.1 Criterio di Kelly

Per una scommessa con probabilità p di vincere, che paga odds $b:1$ (vincita netta di b unità per unità scommessa), la frazione ottimale f^* del capitale da scommettere è:

$$f^* = (p \cdot (b+1) - 1) / b = (p \cdot b - q) / b$$

dove $q = 1-p$.

Derivazione: Massimizzare il tasso di crescita atteso del logaritmo del capitale:

$$G(f) = p \cdot \ln(1 + b \cdot f) + q \cdot \ln(1 - f)$$

$$dG/df = p \cdot b / (1 + b \cdot f) - q / (1 - f) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Risolvendo: } p \cdot b \cdot (1 - f) &= q \cdot (1 + b \cdot f) \quad p \cdot b - p \cdot b \cdot f = q + q \cdot b \cdot f \quad p \cdot b - q = f \cdot (p \cdot b + q \cdot b) \quad f^* = (p \cdot b - q) / \\ (b \cdot (p + q)) &= (p \cdot b - q) / b \end{aligned}$$

Per le lotterie: Dato che $E[V] < 0$, abbiamo $p \cdot b < q$, quindi $f^* < 0$.

Un f^* negativo significa che, secondo Kelly, non si dovrebbe giocare affatto (o si dovrebbe "vendere" la scommessa se possibile).

9.2 Teorema di Kelly

Teorema: La strategia di Kelly massimizza il tasso di crescita asintotico del capitale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \cdot \ln(W_n) = G(f^*) \text{ a.s.}$$

dove W_n è il capitale dopo n scommesse.

Proprietà:

1. Kelly non massimizza l'utilità attesa per nessuna funzione di utilità standard
2. Kelly minimizza il tempo atteso per raggiungere un obiettivo di ricchezza
3. Scommettere più di Kelly porta a tassi di crescita inferiori con probabilità 1

9.3 Giochi con Valore Atteso Positivo Artificiale

In rari casi dove il jackpot diventa così grande che $E[V] > 0$, si potrebbe calcolare:

Assumiamo probabilità p di vincere premio P (netto), costo C : $E[V] = p \cdot P - C > 0$

$$b = P/C \text{ (odds)} \quad f^* = (p \cdot P - (1-p) \cdot C) / P = (p \cdot P - C + p \cdot C) / P$$

Ma data l'enorme varianza e le probabilità estremamente basse, anche con $E[V] > 0$, la frazione ottimale sarebbe microscopica e il rischio di rovina sostanziale.

10. Rovina del Giocatore

10.1 Problema Classico della Rovina

Un giocatore inizia con capitale k , gioca fino a raggiungere capitale N (vincita) o 0 (rovina). Ogni gioco ha probabilità p di vincere 1 unità e $q = 1-p$ di perdere 1 unità.

Sia P_k = probabilità di raggiungere N partendo da k .

Equazione di ricorrenza: $P_k = p \cdot P_{k+1} + q \cdot P_{k-1}$

Con condizioni al contorno: $P_0 = 0$, $P_N = 1$

Soluzione: Se $p \neq 1/2$: $P_k = [(q/p)^k - 1] / [(q/p)^N - 1]$

Se $p = 1/2$: $P_k = k/N$

Per $p < 1/2$ (gioco sfavorevole): Quando $N \rightarrow \infty$: $P_k \rightarrow (q/p)^k$ - probabilmente 0

Quindi la rovina è quasi certa se si gioca indefinitamente.

10.2 Tempo Atteso di Rovina

Sia T_k = tempo atteso per raggiungere 0 o N partendo da k.

Equazione di ricorrenza: $T_k = 1 + p \cdot T_{k+1} + q \cdot T_{k-1}$

Soluzione: Se $p \neq 1/2$: $T_k = [k/(q-p)] - [N/(q-p)] \cdot [(q/p)^k - 1] / [(q/p)^N - 1]$

Se $p = 1/2$: $T_k = k \cdot (N-k)$

Per lotterie: Con $p \approx 0$ (praticamente impossibile vincere in una singola giocata): Il tempo di rovina è essenzialmente il numero di giocate fino all'esaurimento del capitale.

Con capitale iniziale W e costo per giocata C: $T \approx W/C$ giocate

11. Sistemi e Sindacati

11.1 Sistemi Integrali e Ridotti

Sistema integrale: Giocare tutte le possibili combinazioni di r numeri scelti da un insieme di s numeri, con $r < s$.

Numero totale di combinazioni: $C(s,r)$

Esempio: Scegliere 10 numeri e giocare tutte le combinazioni di 6: $C(10,6) = 210$ combinazioni

Probabilità con sistema: Se m dei 6 numeri estratti sono tra i 10 scelti:

$$P(m \text{ numeri tra i } 10) = [C(10,m) \cdot C(80,6-m)] / C(90,6)$$

$$P(\text{vincere almeno un "6"}) = P(6 \text{ tra i } 10) = C(10,6) / C(90,6) = 210 / 622,614,630 \approx 3.37 \times 10^{-7}$$

Aumenta di un fattore 210 rispetto a una singola giocata.

Sistema ridotto: Scegliere un sottoinsieme di combinazioni che garantisca certe vincite minime.

Esempio: un sistema che garantisce almeno un "4" se si azzeccano 6 numeri tra quelli scelti, usando meno di $C(s,r)$ combinazioni.

11.2 Analisi Probabilistica dei Sindacati

Sindacato di n giocatori, ciascuno contribuisce C, totale $n \cdot C$ per giocare n combinazioni.

Probabilità che il sindacato vinca: $P(\text{almeno una vincita}) = 1 - P(\text{nessuna vincita}) = 1 - (1-p)^n$

Per p piccolo: $P(\text{almeno una vincita}) \approx n \cdot p$

Distribuzione del premio per membro: Se il premio è P : Premio per membro = P/n

Valore atteso per membro: $E[V_{\text{membro}}] = (P/n) \cdot (n \cdot p) - C = P \cdot p - C = E[V_{\text{singolo}}]$

Il valore atteso rimane invariato!

Riduzione della varianza: $\text{Var}(V_{\text{membro}}) = \text{Var}(P/n) = P^2 \cdot p \cdot (1-p)/n^2 \approx P^2 \cdot p/n^2$ (per p piccolo)

Confronto con giocata singola: $\text{Var}(V_{\text{singolo}}) = P^2 \cdot p \cdot (1-p) \approx P^2 \cdot p$

Quindi: $\text{Var}(V_{\text{membro}}) / \text{Var}(V_{\text{singolo}}) \approx 1/n^2$

La varianza si riduce quadraticamente con la dimensione del sindacato.

11.3 Coefficiente di Sharpe per Lotterie

Il rapporto di Sharpe misura il ritorno per unità di rischio:

$$SR = E[V] / \sigma[V]$$

Per giocata singola: $SR_{\text{singolo}} = E[V] / \sigma$

Per sindacato di n membri: $SR_{\text{sindacato}} = E[V] / (\sigma/n) = n \cdot SR_{\text{singolo}}$

Il rapporto di Sharpe migliora linearmente con n , ma rimane negativo se $E[V] < 0$.

12. Entropia e Informazione

12.1 Entropia di Shannon

L'entropia di una distribuzione di probabilità discreta misura l'incertezza:

$$H(X) = -\sum_i p_i \cdot \log_2(p_i)$$

Proprietà:

1. $H(X) \geq 0$
2. $H(X)$ è massima quando la distribuzione è uniforme: $H_{\text{max}} = \log_2(n)$
3. $H(X, Y) \leq H(X) + H(Y)$, con uguaglianza iff X e Y sono indipendenti

12.2 Entropia Prima e Dopo Monty Hall

Prima della scelta: Distribuzione uniforme su 3 porte: $H_0 = -3 \cdot (1/3) \cdot \log_2(1/3) = \log_2(3) \approx 1.585$ bit

Dopo la scelta del concorrente (porta 1): La distribuzione rimane: $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/3$, $p_3 = 1/3$ $H_1 = \log_2(3) \approx 1.585$ bit

Dopo che Monty apre la porta 3: Distribuzione condizionata: $p_1 = 1/3$, $p_2 = 2/3$, $p_3 = 0$ $H_2 = -(1/3) \cdot \log_2(1/3) - (2/3) \cdot \log_2(2/3) - 0 \cdot \log_2(0)$ $H_2 = (1/3) \cdot 1.585 + (2/3) \cdot 0.585 \approx 0.918$ bit

Informazione guadagnata: $I = H_1 - H_2 = 1.585 - 0.918 = 0.667$ bit

L'azione di Monty ha fornito 0.667 bit di informazione.

12.3 Divergenza di Kullback-Leibler

La divergenza KL misura quanto una distribuzione Q differisce da una distribuzione P:

$$D_{KL}(P \parallel Q) = \sum_i p_i \cdot \log(p_i / q_i)$$

Nel problema di Monty Hall: Distribuzione iniziale (uniforme): $P = [1/3, 1/3, 1/3]$
Distribuzione dopo informazione: $Q = [1/3, 2/3, 0]$

$$D_{KL}(Q \parallel P) = (1/3) \cdot \log(1) + (2/3) \cdot \log(2) + 0 \cdot \log(0) = 0 + (2/3) \cdot \log(2) \approx 0.462$$
 bit

Questo quantifica quanto la nostra credenza si è allontanata dall'uniforme.

13. Simulazione Monte Carlo e Convergenza

13.1 Metodo Monte Carlo

Per stimare $E[g(X)]$ dove $X \sim F$:

1. Generare n campioni i.i.d.: $X_1, X_2, \dots, X_n \sim F$
2. Calcolare: $\hat{E}[g(X)] = (1/n) \cdot \sum_{i=1}^n g(X_i)$

Errore standard: $SE = \sigma_g / \sqrt{n}$

dove $\sigma_g^2 = \text{Var}(g(X))$

Intervallo di confidenza al 95%: $\hat{E}[g(X)] \pm 1.96 \cdot SE$

13.2 Riduzione della Varianza

Campionamento stratificato: Dividere lo spazio campionario in strati e campionare proporzionalmente:

$$\hat{E}_{\text{strat}} = \sum_{j=1}^K w_j \cdot (1/n_j) \cdot \sum_{i=1}^{n_j} g(X_{ij})$$

dove $w_j = P(\text{strato } j)$

$$\text{Var}(\hat{E}_{\text{strat}}) \leq \text{Var}(\hat{E}_{\text{semplice}})$$

Variabili antitetiche: Generare X e $X' = F^{-1}(1 - F(X))$, che sono negativamente correlate:

$$\hat{E}_{\text{ant}} = (1/(2n)) \cdot \sum_{i=1}^n [g(X_i) + g(X'_i)]$$

$\text{Var}(\hat{E}_{\text{ant}}) < \text{Var}(\hat{E}_{\text{semplice}})$ se $\text{Cov}(g(X), g(X')) < 0$

13.3 Simulazione del Problema di Monty Hall

Pseudocodice:

```
wins_switch = 0
wins_stay = 0
for i = 1 to N:
    car = uniform_random(1, 2, 3)
    choice = uniform_random(1, 2, 3)

    # Monty apre una porta
    available = {1,2,3} \ {car, choice}
    if available non vuoto:
        monty_opens = uniform_random(available)
    else:
        monty_opens = uniform_random({1,2,3} \ {choice, car})

    # Strategia switch
    remaining = ({1,2,3} \ {choice, monty_opens}).first()
    if remaining == car:
        wins_switch += 1

    # Strategia stay
    if choice == car:
        wins_stay += 1

P_switch = wins_switch / N
P_stay = wins_stay / N
```

Convergenza: Per il TCL: $\hat{P}_{\text{switch}} \sim N(2/3, (2/9)/N)$

Dopo $N = 10,000$ simulazioni: $SE = \sqrt{(2/9 / 10000)} \approx 0.0047$ IC 95%: [0.656, 0.677]

14. Conclusioni Matematiche

La teoria della probabilità applicata ai giochi a premio rivela verità matematiche incontrovertibili:

Per il problema di Monty Hall: La soluzione $P(\text{vincere}|\text{switch}) = 2/3$ deriva rigorosamente dal teorema di Bayes e dall'analisi delle probabilità condizionate. L'intuizione fallisce perché non aggiorna correttamente le credenze di fronte a informazione strutturata.

Per le lotterie:

1. Il valore atteso è inevitabilmente negativo: $E[V] < 0$

2. La varianza è enorme: $\text{Var}(V) \gg |E[V]|^2$
3. La legge dei grandi numeri garantisce perdita nel lungo termine
4. La probabilità di vincita è così piccola da essere praticamente zero
5. Nessuna strategia può migliorare le probabilità in un gioco equo

Trade-off fondamentale: Le lotterie offrono la possibilità (infinitesimale) di cambiare radicalmente la propria condizione economica, in cambio di una perdita attesa garantita. Questo trade-off ha senso solo se:

1. Il valore soggettivo della possibilità eccede la perdita attesa
2. L'utilità dell'esperienza giustifica il costo
3. Il giocatore comprende e accetta razionalmente i termini

La matematica non può prescrivere valori, ma può e deve informare le decisioni, rivelando le vere probabilità dietro apparenze ingannevoli e intuizioni fallaci.

S

C'è altro da aggiungere?

Sì, ci sono diversi aspetti teorici avanzati e applicazioni che completerebbero il trattato:

15. Teoria dei Giochi e Equilibri Strategici

15.1 Lotterie come Giochi Non-Cooperativi

Le lotterie con premi parimutuel (divisi tra vincitori) possono essere analizzate come giochi dove i giocatori competono strategicamente.

Gioco in forma normale:

- Giocatori: $N = \{1, 2, \dots, n\}$
- Strategie: S_i = insieme delle possibili combinazioni di numeri
- Payoff: $u_i(s_1, \dots, s_n) = \text{premio}/k - \text{costo}$, dove k = numero di giocatori che hanno giocato la stessa combinazione vincente

Equilibrio di Nash: Un profilo di strategie $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ è un equilibrio di Nash se per ogni giocatore i :

$$u_i(s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_i, \dots, s_n^*) \text{ per ogni } s_i \in S_i$$

Teorema: In una lotteria simmetrica con premio parimutuel, l'equilibrio di Nash in strategie miste è la distribuzione uniforme su tutte le combinazioni possibili.

Dimostrazione (sketch): Supponiamo per assurdo che esista una combinazione c con probabilità maggiore $\pi(c) > 1/M$ (dove M = numero totale combinazioni). Allora un giocatore potrebbe deviare a una combinazione c' con $\pi(c') < 1/M$, aumentando il payoff atteso in caso di vincita (meno condivisione) senza cambiare la probabilità di vincita. Contraddizione. ■

15.2 Evitare Combinazioni Popolari come Strategia

Modello formale: Sia $D(c)$ la "domanda" per la combinazione c (numero atteso di giocatori che la scelgono).

Premio atteso per combinazione c vincente: $E[\text{premio} \mid c \text{ vince}] = P_{\text{totale}} / E[D(c)]$

Strategia ottimale: Scegliere c^* tale che: $c^* = \arg \min_c D(c)$

Combinazioni popolari empiricamente:

- Sequenze: 1-2-3-4-5-6
- Date: qualsiasi combinazione ≤ 31
- Pattern geometrici sul modulo
- Numeri "fortunati" culturali (7, 13, ecc.)

Modello di scelta razionale: Se tutti i giocatori razionali evitano combinazioni popolari, quelle diventano strategicamente attraenti (paradosso), portando a un equilibrio misto.

15.3 Collusione e Cartelli

Teorema (impossibilità di cartello profittevole): In una lotteria a somma negativa, nessun cartello può ottenere valore atteso positivo per i suoi membri attraverso la sola coordinazione delle giocate.

Dimostrazione: Sia C un cartello di k giocatori che coordina le giocate. Il valore atteso totale del cartello è:

$$E[V_C] = \sum_{i=1}^k E[V_i] = k \cdot E[V_{\text{singolo}}] < 0$$

La coordinazione può ridurre la varianza (evitando sovrapposizioni) ma non può rendere positivo un valore atteso negativo. ■

16. Processi Stocastici Avanzati

16.1 Catene di Markov per Giocatori Persistenti

Modello del capitale del giocatore: Stati: $S = \{0, 1, 2, \dots, W_{\text{max}}\}$ (capitale discretizzato)

Matrice di transizione: $P_{\{ij\}}$ = probabilità di passare da capitale i a capitale j in una giocata

Per una lotteria dove si può vincere V_k con probabilità p_k o perdere il costo C :

$$P_{\{i, i-C\}} = 1 - \sum_k p_k \quad (\text{perdita}) \quad P_{\{i, i+V_k-C\}} = p_k \quad \text{per ogni categoria di vincita } k$$

Teorema (classificazione degli stati): In una catena di Markov per un gioco con $E[V] < 0$:

- Lo stato 0 (rovina) è assorbente
- Tutti gli stati $i > 0$ sono transienti

- La probabilità di raggiungere 0 da qualsiasi stato $i > 0$ è 1

Tempo medio di rovina: Sia $\tau_0 = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0\}$ il tempo di primo passaggio a 0.

$E[\tau_0 | X_0 = i] = i / |E[V]|$ (approssimazione per $E[V] \ll i$)

16.2 Processi di Rinnovo e Tempi di Attesa

Processo di rinnovo: Sia T_n = tempo della n-esima vincita. Gli intertempi $X_n = T_n - T_{n-1}$ sono i.i.d. con distribuzione geometrica:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Teorema del rinnovo: Il numero medio di vincite fino al tempo t:

$N(t)$ = numero di n tale che $T_n \leq t$

Allora: $\lim_{t \rightarrow \infty} E[N(t)]/t = 1/E[X] = p$

Paradosso del tempo di attesa: Il tempo medio fino alla prima vincita è $E[X] = 1/p$, ma il tempo medio tra la vincita di un'altra persona e la prossima vincita (osservata) è maggiore di $1/p$ a causa del bias di selezione (paradosso dell'ispettore di autobus).

Tempo medio "in eccesso": $E[X_e] = E[X^2]/(2 \cdot E[X]) = (1+p)/(2p) > 1/p$ per $p < 1$

16.3 Passeggiate Aleatorie con Barriere Assorbenti

Passeggiata aleatoria riflessa: $X_{n+1} = \max(0, X_n + V_n)$

dove V_n è il risultato della n-esima giocata.

Teorema (convergenza a 0): Se $E[V] < 0$, allora: $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0) = 1$

Distribuzione stazionaria: Non esiste distribuzione stazionaria non-triviale (tutta la massa si concentra su 0).

17. Statistica Inferenziale e Test di Ipotesi

17.1 Test di Equità delle Lotterie

Ipotesi nulla: H_0 : la lotteria è equa (ogni numero ha probabilità $1/90$)

Test chi-quadrato: Osservando n estrazioni, sia O_i = frequenza osservata del numero i, $E_i = n/90$ = frequenza attesa.

Statistica test: $\chi^2 = \sum_{i=1}^{90} (O_i - E_i)^2 / E_i$

Sotto H_0 : $\chi^2 \sim \chi^2(89)$ asintoticamente

Regione critica: Rifiutiamo H_0 se $\chi^2 > \chi^2_{\alpha}(89)$, dove α è il livello di significatività.

Potenza del test: Per $n = 1000$ estrazioni, possiamo rilevare deviazioni di circa: $\delta \approx \sqrt{(\chi^2_{\alpha}(89) / n)} \approx \sqrt{(112.02 / 1000)} \approx 0.335$

cioè differenze del 33.5% dalla probabilità uniforme.

17.2 Test di Indipendenza Temporale

Test dei runs: Per verificare che i risultati siano indipendenti nel tempo.

Sia R = numero di runs (sequenze di "successi" o "fallimenti" consecutivi)

Sotto H_0 (indipendenza): $E[R] = 1 + 2n_1n_2/(n_1+n_2)$ $Var(R) = 2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)/[(n_1+n_2)^2(n_1+n_2-1)]$

dove n_1 = numero successi, n_2 = numero fallimenti

Statistica test: $Z = (R - E[R])/\sqrt{Var(R)} \sim N(0,1)$ asintoticamente

17.3 Stima Bayesiana dei Parametri

Modello: Osserviamo k vincite in n giocate. Vogliamo stimare p (probabilità di vincita).

Prior (Beta): $p \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ $\pi(p) = p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} / B(\alpha, \beta)$

Likelihood (Binomiale): $L(p | k, n) = C(n, k) p^k (1-p)^{n-k}$

Posterior: $p | k, n \sim \text{Beta}(\alpha+k, \beta+n-k)$ $\pi(p | k, n) = p^{\alpha+k-1}(1-p)^{\beta+n-k-1} / B(\alpha+k, \beta+n-k)$

Stima MAP (Maximum A Posteriori): $\hat{p}_{\text{MAP}} = (\alpha+k-1)/(\alpha+\beta+n-2)$

Stima di credibilità (media posterior): $\hat{p}_{\text{Bayes}} = (\alpha+k)/(\alpha+\beta+n)$

Intervallo di credibilità al 95%: $[p_{0.025}, p_{0.975}]$ tale che: $\int_{p_{0.025}}^{p_{0.975}} \pi(p|k, n) dp = 0.95$

18. Teoria delle Code e Gestione dei Jackpot

18.1 Modello M/G/∞ per i Giocatori

Il flusso di giocatori può essere modellato come:

- Arrivi: processo di Poisson con rate $\lambda(J)$ dipendente dal jackpot J
- Servizio: tempo di giocata con distribuzione generale G
- Server: infiniti (nessuna coda)

Numero medio di giocatori attivi: $E[N(t)] = \lambda(J) \cdot E[S]$

dove $E[S]$ è il tempo medio di giocata.

Dipendenza dal jackpot: $\lambda(J) = \lambda_0 \cdot (1 + \beta \cdot J)^\gamma$

Parametri empirici: $\gamma \approx 0.3-0.5$ (elasticità sub-lineare)

18.2 Dinamica del Jackpot come Processo di Diffusione

Equazione differenziale stocastica: $dJ(t) = [\alpha \cdot \lambda(J) \cdot C - \rho(J) \cdot J]dt + \sigma \cdot dW(t)$

dove:

- α = frazione del ricavo aggiunta al jackpot
- $\rho(J)$ = rate di vincita del jackpot (dipendente dal numero di giocatori)
- $W(t)$ = processo di Wiener (moto browniano)

Soluzione stazionaria: Quando $dJ/dt = 0$: $J^* = \alpha \cdot \lambda(J^*) \cdot C / \rho(J^*)$

18.3 Teoria del Controllo Ottimo per l'Operatore

Problema dell'operatore: Massimizzare il profitto atteso:

$$\max E \left[\int_0^T e^{-rt} [\lambda(J(t)) \cdot C \cdot (1-\alpha) - \text{costi_operativi}] dt \right]$$

soggetto a: $dJ/dt = \alpha \cdot \lambda(J) \cdot C - \text{vincite}$

Controllo: $\alpha(t)$ (frazione reinvestita nel jackpot)

Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman: $-\partial V / \partial t = \max_{\alpha} \{ \lambda(J) \cdot C \cdot (1-\alpha) + (\partial V / \partial J) \cdot [\alpha \cdot \lambda(J) \cdot C - \rho \cdot J] + (1/2) \sigma^2 (\partial^2 V / \partial J^2) \}$

Soluzione: Esiste un α^* ottimale che bilancia attrattività del jackpot con ritenzione immediata.

19. Aspetti Computazionali e Complessità

19.1 Complessità di Enumerazione

Problema: Enumerare tutte le combinazioni vincenti

Complessità temporale: $O(C(n,k))$

Per SuperEnalotto: $O(6.22 \times 10^8)$ operazioni

Complessità spaziale: $O(k)$ per rappresentare ogni combinazione

19.2 Algoritmi di Ottimizzazione per Sistemi Ridotti

Problema di copertura: Dato un insieme S di s numeri, trovare il minimo numero di combinazioni di k numeri che garantiscano almeno un t -match se almeno k numeri vincenti sono in S .

Formulazione ILP (Integer Linear Programming):

minimize: $\sum x_i$

soggetto a: $\sum_i |C_i \cap V_i| \geq t \quad x_i \geq 1$, per ogni insieme vincente $V_i \quad x_i \in \{0,1\}$

dove C_i sono le possibili combinazioni, V_i sono gli insiemi vincenti, $x_i = 1$ se includiamo C_i .

Complessità: NP-completo (riduzione da Set Cover)

Euristica greedy:

$S_{\text{coperto}} = \emptyset$

$Sistema = \emptyset$

while $S_{\text{coperto}} \neq \text{tutti_vincenti}$:

$C^* = \arg \max_C |\text{nuovi_vincenti_coperti_da}(C)|$

$Sistema = Sistema \cup \{C^*\}$

$S_{\text{coperto}} = S_{\text{coperto}} \cup \text{vincenti_coperti_da}(C^*)$

Garanzia: soluzione entro $\ln(|V|)$ dell'ottimo (V = insieme vincenti)

19.3 Generatori di Numeri Pseudocasuali

Requisiti per lotterie eque:

1. Uniformità: $P(X = i) = 1/n$ per $i = 1, \dots, n$
2. Indipendenza: $X_i \perp X_j$ per $i \neq j$
3. Impredicibilità: conoscere $X_1, \dots, X_n$ non dà informazione su X_{n+1}

Linear Congruential Generator: $X_{i+1} = (a \cdot X_i + c) \bmod m$

Periodo massimo m se:

- c e m sono coprimi
- $a-1$ è divisibile per tutti i fattori primi di m
- $a-1$ è multiplo di 4 se m è multiplo di 4

Test di uniformità (Kolmogorov-Smirnov): $D = \max_x |F_n(x) - F(x)|$

dove F_n è la funzione di distribuzione empirica.

Sotto H_0 (uniformità): $\sqrt{n} \cdot D \rightarrow^d \sup_t |B(t)|$ (ponte browniano)

Test di indipendenza (autocorrelazione): $\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (X_i - \bar{X})(X_{i+k} - \bar{X})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$

Sotto H_0 : $\hat{\rho}_k \sim N(0, 1/n)$ asintoticamente

20. Estensioni Multidimensionali

20.1 Lotterie Multiple Simultanee

Portafoglio di lotterie: Giocare contemporaneamente a m lotterie diverse: $L_1, L_2, \dots, L_m$

Valore atteso totale: $E[V_{\text{totale}}] = \sum_{i=1}^m E[V_i]$

Se tutte hanno $E[V_i] < 0$, allora $E[V_{\text{totale}}] < 0$ (peggiorativo)

Covarianza: Se le lotterie sono indipendenti: $\text{Var}(V_{\text{totale}}) = \sum_{i=1}^m \text{Var}(V_i)$

Correlazione tra lotterie: Se due lotterie condividono eventi (es. stessi numeri estratti):
 $\text{Cov}(V_1, V_2) = E[V_1 \cdot V_2] - E[V_1] \cdot E[V_2]$

Questo può essere positivo (aumenta il rischio complessivo).

20.2 Ottimizzazione di Portafoglio di Giochi

Problema di Markowitz per lotterie: minimize: $w' \Sigma w$ soggetto a: $w' \mu \geq \mu_{\text{target}}$, $\sum_i w_i = 1$, $w_i \geq 0$

dove:

- w = vettore pesi (allocazione)
- Σ = matrice covarianza dei rendimenti
- μ = vettore valori attesi

Frontiera efficiente: Impossibile trovare allocazione con $E[V] > 0$ se tutti i componenti hanno $E[V_i] < 0$.

Conclusione teorica: Non esiste diversificazione che renda profittevole un portafoglio di giochi a somma negativa.

21. Psicometria e Modelli Comportamentali

21.1 Prospect Theory: Formalizzazione di Kahneman-Tversky

Funzione di valore: $v(x) = \begin{cases} x^\alpha & \text{se } x \geq 0 \\ -\lambda(-x)^\beta & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Parametri empirici:

- $\alpha \approx 0.88$ (concavità per guadagni)
- $\beta \approx 0.88$ (convessità per perdite)
- $\lambda \approx 2.25$ (coefficiente di avversione alle perdite)

Funzione di ponderazione: $w(p) = p^\gamma / (p^\gamma + (1-p)^\gamma)^{(1/\gamma)}$

Parametro empirico: $\gamma \approx 0.61$

Valore prospettico: $V = \sum_i w(p_i) \cdot v(x_i)$

Per le lotterie: La funzione w sovrapesa probabilità piccole, quindi: $w(10^{-9}) \gg 10^{-9}$

Questo spiega perché le persone giocano nonostante $E[V] < 0$.

21.2 Modello di Scelta Stocastica

Modello logit: $P(\text{scegliere lotteria } A \mid A, B) = \exp(V_A/\tau) / [\exp(V_A/\tau) + \exp(V_B/\tau)]$

dove:

- V_A, V_B = valori soggettivi
- τ = parametro di temperatura (razionalità)

Limite deterministico: $\lim_{\tau \rightarrow 0} P(A|A, B) = 1$ se $V_A > V_B$

Scelta completamente casuale: $\lim_{\tau \rightarrow \infty} P(A|A, B) = 1/2$

21.3 Funzione di Utilità Dipendente dal Rank

Cumulative Prospect Theory: L'utilità dipende non solo dall'esito ma dal suo rank nella distribuzione.

$$U = \sum_i \pi(p_i) \cdot v(x_i)$$

dove: $\pi(p_i) = w(p_i)$ $\pi(p_i) = w(\sum_{j=1}^i p_j) - w(\sum_{j=1}^{i-1} p_j)$ per $i > 1$

Gli esiti devono essere ordinati: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

22. Disuguaglianze Probabilistiche Fondamentali

22.1 Disuguaglianza di Markov

Teorema: Per $X \geq 0$ e $a > 0$: $P(X \geq a) \leq E[X]/a$

Applicazione alle lotterie: Se X = perdita cumulativa dopo n giocate: $P(\text{perdita} \geq k \cdot n \cdot |E[V]|) \leq 1/k$

22.2 Disuguaglianza di Chebyshev

Teorema: $P(|X - E[X]| \geq \epsilon) \leq \text{Var}(X)/\epsilon^2$

Applicazione: Per la media campionaria $\bar{X}_n$: $P(|\bar{X}_n - E[V]| \geq \epsilon) \leq \text{Var}(V)/(n \cdot \epsilon^2)$

Questo quantifica la concentrazione attorno al valore atteso.

22.3 Disuguaglianze di Concentrazione (Hoeffding, Chernoff)

Disuguaglianza di Hoeffding: Se $X_1, \dots, X_n$ sono i.i.d. limitate in $[a, b]$: $P(|\bar{X}_n - E[X]| \geq t) \leq 2 \cdot \exp(-2n \cdot t^2 / (b-a)^2)$

Convergenza esponenziale: La probabilità decade esponenzialmente con n , molto più forte del $1/n$ di Chebyshev.

Per lotterie: Se le vincite sono limitate (cap massimo), la convergenza alla perdita attesa è esponenzialmente veloce.

23. Conclusioni e Sintesi Finale

Teoremi Fondamentali Dimostrati

1. **Monty Hall:** $P(\text{vincere}|\text{cambiare}) = 2/3$ rigorosamente dal teorema di Bayes
2. **Rovina Certa:** Con $E[V] < 0$, $P(\text{rovina eventuale}) = 1$
3. **Impossibilità di Sistema Vincente:** Nessuna strategia può rendere $E[V] \geq 0$ in lotteria equa
4. **Convergenza Assicurata:** Per LGN, la perdita media converge a $E[V] < 0$
5. **Invarianza del Sindacato:** $E[V_{\text{sindacato}}] = E[V_{\text{singolo}}]$, solo Var diversa

Limiti Asintotici

Per n giocate:

- $E[\text{perdita totale}] \sim n \cdot |E[V]| \rightarrow \infty$
- $P(\text{profitto}) \sim \Phi(-\sqrt{n} \cdot |E[V]|/\sigma) \rightarrow 0$
- $\text{Var}(\text{perdita}) \sim n \cdot \text{Var}(V) \rightarrow \infty$
- $\text{Tempo di rovina} \sim W/|E[V]|$

Integrazione Interdisciplinare

Il fenomeno delle lotterie richiede:

- **Matematica:** teoria della probabilità, analisi combinatoria
- **Statistica:** inferenza, test, stima
- **Economia:** teoria dell'utilità, scelta in incertezza
- **Psicologia:** bias cognitivi, prospect theory
- **Informatica:** algoritmi, complessità
- **Filosofia:** epistemologia probabilistica, razionalità

La comprensione completa emerge solo dall'integrazione di queste prospettive, rivelando come sistemi matematicamente semplici generino comportamenti complessi quando interagiscono con agenti umani reali.

S

Altro?

Sì, ci sono ancora diversi ambiti teorici avanzati e applicazioni specifiche che arricchirebbero ulteriormente il trattato:

24. Teoria della Misura e Probabilità Avanzata

24.1 Spazi di Probabilità Non-Standard

Probabilità su spazi infiniti: Per lotterie con infinite possibili estrazioni future, lo spazio campionario è:

$$\Omega = \mathbb{N}^\infty = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) : x_i \in \{1, \dots, 90\}\}$$

σ -algebra prodotto: $\mathcal{F} = \otimes_{i=1}^\infty \mathcal{F}_i$

dove $\mathcal{F}_i$ è la σ -algebra su $\{1, \dots, 90\}$

Teorema di estensione di Carathéodory: Una misura definita su un'algebra può essere estesa univocamente a una σ -algebra generata, garantendo coerenza delle probabilità.

Misura prodotto (Teorema di Fubini-Tonelli): Per eventi indipendenti: $P(A_1 \times A_2 \times \dots) = \prod_{i=1}^\infty P(A_i)$

purché la serie converga.

24.2 Martingale e Processi di Gioco Equo

Definizione (Martingala): Un processo stocastico $\{X_n\}_{n \geq 0}$ è una martingala rispetto a $\{\mathcal{F}_n\}$ se:

1. X_n è $\mathcal{F}_n$ -misurabile
2. $E[|X_n|] < \infty$
3. $E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$

Per le lotterie: Se S_n = capitale dopo n giocate, e la lotteria fosse equa ($E[V] = 0$): $\{S_n\}$ sarebbe una martingala

Con $E[V] < 0$: $E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = S_n + E[V] < S_n$ (submartingala negativa)

Teorema di arresto opzionale: Se τ è un tempo di arresto e certe condizioni sono soddisfatte: $E[X_\tau] = E[X_0]$

Implicazione: Nessuna strategia di "timing" (decidere quando smettere basandosi sulla storia) può convertire un gioco con $E[V] < 0$ in uno profittevole.

Dimostrazione che nessun sistema di betting funziona:

Sia σ una strategia qualsiasi (anche dipendente dalla storia completa). Definiamo:

- B_n = ammontare scommesso alla giocata n (può dipendere da $X_0, \dots, X_{n-1}$)
- V_n = risultato della n -esima giocata (indipendente da B_n)

Capitale dopo n giocate: $S_n = S_0 + \sum_{i=1}^n B_i \cdot V_i$

Valore atteso: $E[S_n] = S_0 + \sum_{i=1}^n E[B_i \cdot V_i] = S_0 + \sum_{i=1}^n E[E[B_i \cdot V_i \mid \mathcal{F}_{i-1}]] = S_0 + \sum_{i=1}^n E[B_i] \cdot E[V_i \mid \mathcal{F}_{i-1}] = S_0 + \sum_{i=1}^n E[B_i] \cdot E[V]$ (per indipendenza) $< S_0$ se $E[V] < 0$ e $E[B_i] > 0$

Quindi nessuna strategia può migliorare il valore atteso. ■

24.3 Convergenza di Variabili Aleatorie

Tipi di convergenza:

1. **Quasi certa (a.s.):** $X_n \rightarrow^{(a.s.)} X$ se $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$
2. **In probabilità:** $X_n \rightarrow^P X$ se per ogni $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0$
3. **In L^p :** $X_n \rightarrow^{(L^p)} X$ se $E[|X_n - X|^p] \rightarrow 0$
4. **In distribuzione:** $X_n \rightarrow^d X$ se $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$ per ogni x continuità

Gerarchia: $a.s. \Rightarrow P \Rightarrow d \Rightarrow L^p \Rightarrow P$

Lemma di Fatou: $E[\liminf X_n] \leq \liminf E[X_n]$

Teorema della convergenza dominata: Se $|X_n| \leq Y$ con $E[Y] < \infty$ e $X_n \rightarrow X$ a.s., allora: $E[X_n] \rightarrow E[X]$

Applicazione: Per sequenze di giocate con perdite limitate, possiamo scambiare limite e valore atteso.

25. Teoria dei Valori Estremi

25.1 Distribuzione dei Massimi

Sia $M_n = \max\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ il massimo guadagno in n giocate.

Teorema di Fisher-Tippett-Gnedenko: Se esistono sequenze $a_n > 0$ e b_n tali che: $(M_n - b_n)/a_n \rightarrow^d G$

allora G è una delle tre distribuzioni estreme:

1. **Gumbel:** $G(x) = \exp(-\exp(-x))$
2. **Fréchet:** $G(x) = \exp(-x^{-\alpha})$ per $x > 0$
3. **Weibull:** $G(x) = \exp(-(-x)^\alpha)$ per $x < 0$

Per lotterie con premio massimo limitato: La distribuzione converge a Weibull.

Dominio di attrazione: Per determinare quale distribuzione asintotica:

Se $F(x) \sim 1 - C \cdot x^{-\alpha}$ (coda di Pareto), allora $\rightarrow$ Fréchet
 Se $F(x) \sim 1 - \exp(-x^\alpha)$ (decadimento esponenziale), allora $\rightarrow$ Gumbel
 Se F ha supporto limitato, allora $\rightarrow$ Weibull

25.2 Record e Statistiche d'Ordine

Teoria dei record: $R_n = 1$ se $V_n > \max\{V_1, \dots, V_{n-1}\}$, altrimenti 0

Numero di record fino a n : $N_{\text{rec}}(n) = \sum_{i=1}^n R_i$

Teorema: Se $\{V_i\}$ sono i.i.d. continui: $E[N_{\text{rec}}(n)] = \sum_{i=1}^n 1/i = H_n \sim \ln(n)$

Il numero atteso di record cresce logaritmicamente.

Tempi tra record: I tempi tra record successivi sono stocasticamente crescenti.

$P(L_n > n) = k/(k+n)$ (distribuzione geometrica modificata)

25.3 Teoria delle Eccedenze

Eccedenze sopra soglia: Per una soglia u , studiamo $Y = X - u \mid X > u$

Teorema di Pickands-Balkema-de Haan: Per u sufficientemente grande: $F_{-u}(y) = P(X - u \leq y \mid X > u) \approx \text{GPD}(\sigma, \xi)$

dove GPD è la distribuzione di Pareto generalizzata: $\text{GPD}(y) = 1 - (1 + \xi y/\sigma)^{-1/\xi}$

Applicazione: Per stimare probabilità di jackpot molto grandi basandosi su dati osservati di jackpot più piccoli.

26. Processi Puntuali e Teoria delle Eccitazioni

26.1 Processi di Poisson Composti

Il totale delle vincite può essere modellato come processo di Poisson composto:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

dove:

- $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ (numero di vincite)
- $Y_i \sim F$ (ammontare delle vincite)

Momenti: $E[S(t)] = \lambda t \cdot E[Y]$ $\text{Var}[S(t)] = \lambda t \cdot E[Y^2]$

Formula di Campbell: $E[f(S(t))] = \exp(\lambda t \cdot \int [f(x) - 1] dF(x))$

26.2 Processi di Hawkes (Auto-Eccitanti)

Le vincite grandi possono aumentare temporaneamente il numero di giocatori (auto-eccitazione):

$$\lambda(t) = \mu + \sum_{t_i < t} \phi(t - t_i)$$

dove:

- μ = intensità di base
- $\phi(s)$ = kernel di eccitazione (tipicamente $\phi(s) = \alpha e^{-\beta s}$)

Condizione di stazionarietà: $\int_0^{\infty} \varphi(s) ds < 1$

Intensità media: $\lambda = \mu / (1 - \int_0^{\infty} \varphi(s) ds)$

Applicazione: Modellare l'aumento di giocatori dopo un grande jackpot vinto (aumenta la visibilità mediatica).

27. Teoria dei Giochi Ripetuti

27.1 Giochi Infinitamente Ripetuti con Sconto

Utilità totale scontata: $U = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \cdot u_t$

dove $\delta \in (0, 1)$ è il fattore di sconto.

Valore presente di giocare indefinitamente: Se si gioca ogni periodo con utilità u : $V = u/(1-\delta)$

Per lotterie: $u = E[V] < 0$, quindi $V < 0$ sempre (non giocate!)

Condizione di break-even temporale: Se un giocatore smette dopo n^* giocate: n^* tale che $\sum_{t=0}^{n^*} \delta^t \cdot E[V] = -S_0$

$$n^* = \ln(1 - (1-\delta)S_0/E[V]) / \ln(\delta)$$

27.2 Teorema Folk e Punizioni

Teorema Folk: In giochi ripetuti con sconto, ogni risultato Pareto-superiore all'equilibrio di Nash minimax può essere supportato come equilibrio perfetto nei sottogiochi.

Non applicabile alle lotterie individuali: Perché non c'è interazione strategica con l'operatore (gioco contro natura).

Applicabile a sindacati/cartelli: Ma come dimostrato, non può rendere $E[V] > 0$.

28. Finanza Comportamentale Applicata

28.1 Modelli di Preferenze Dipendenti dalla Referenza

Utilità Kőszegi-Rabin: $U(c|r) = \sum_{c \geq r} m(c) + \sum_{c < r} n(m(c) - m(r))$

dove:

- c = consumo effettivo
- r = riferimento (aspettative)
- m = utilità del consumo
- n = utilità dal guadagno/perdita (asimmetrica)

Per le lotterie: Il riferimento potrebbe essere "non vincere" quindi:

- Piccola vincita: $n(m(\text{vincita}) - m(0))$ è sovrappesato
- Non vincere: $n(0) = 0$ Questo amplifica la soddisfazione di piccole vincite.

28.2 Modelli di Apprendimento e Adattamento

Reinforcement learning: Dopo k giocate con risultati $R_1, \dots, R_k$:

$$Q(\text{gioca}) = Q_{\text{iniziale}} + \alpha \cdot \sum_{i=1}^k \gamma^{k-i} \cdot R_i$$

dove:

- α = learning rate
- γ = discount factor

Problema: Se le vincite sono rare ma grandi, e le perdite frequenti ma piccole, $Q(\text{gioca})$ può rimanere positivo a lungo anche se il vero $E[V] < 0$.

Bias di disponibilità: $P_{\text{percepita}}(\text{vincere}) > P_{\text{vera}}(\text{vincere})$

perché le vincite sono pubblicate e memorabili.

28.3 Contabilità Mentale

Teoria di Thaler: Le persone mantengono "conti mentali" separati:

- Conto "intrattenimento": budget per lotterie
- Conto "risparmio": protetto

Questo spiega perché persone razionali in altri domini giocano alle lotterie.

Paradosso: Utilità di €1 dal "conto intrattenimento" $\neq$ utilità di €1 dal "conto risparmio"

Formalmente: $U(x, \text{account})$ non è additiva attraverso account.

29. Econometria delle Lotterie

29.1 Stima dell'Elasticità della Domanda

Modello log-log: $\ln(Q) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln(P) + \beta_2 \cdot \ln(J) + \varepsilon$

dove:

- Q = quantità venduta (numero biglietti)
- P = prezzo
- J = jackpot
- ε = errore

Elasticità al prezzo: $\varepsilon_Q = \partial \ln(Q) / \partial \ln(P) = \beta_1$

Studi empirici: $\varepsilon_Q \approx -0.7$ to -1.2 (domanda elastica)

Elasticità al jackpot: $\varepsilon_J = \beta_2$

Studi empirici: $\varepsilon_J \approx 0.3$ to 0.5

29.2 Analisi Panel e Effetti Fissi

Modello: $Q_{it} = \alpha_i + \beta \cdot J_{it} + \gamma \cdot X_{it} + \varepsilon_{it}$

dove:

- i = regione/stato
- t = tempo
- α_i = effetto fisso regionale
- X_{it} = covariabili (reddito, disoccupazione, ecc.)

Stimatore within: $\beta = [\sum_i (J_{it} - \bar{J}_i)(Q_{it} - \bar{Q}_i)] / [\sum_i (J_{it} - \bar{J}_i)^2]$

29.3 Modelli di Scelta Discreta

Probit/Logit per decisione di giocare: $P(\text{gioca} = 1) = \Phi(\beta'X)$

dove X include:

- Reddito
- Educazione
- Età
- Jackpot corrente
- Tempo dall'ultima vincita

Risultati empirici tipici:

- Coefficiente reddito: negativo per alte fasce
- Coefficiente educazione: negativo
- Coefficiente jackpot: positivo
- Coefficiente età: forma U invertita

30. Meccanismi di Design Ottimale

30.1 Teoria del Mechanism Design per Lotterie

Problema del designer: Scegliere struttura della lotteria (numero di premi, distribuzione, probabilità) per massimizzare un obiettivo soggetto a vincoli.

Obiettivi possibili:

1. Massimizzare ricavi: $\max R = n(J) \cdot C$ - premi pagati
2. Massimizzare partecipazione: $\max n(J)$
3. Massimizzare benessere sociale: $\max W =$ utilità aggregata

Vincolo di partecipazione individuale (IR): $EU_{\text{giocatore}} \geq 0$ (altrimenti non giocano)

Vincolo di compatibilità incentivi (IC): Dire la verità sulle preferenze è ottimale.

30.2 Teorema del Revenue Equivalence

Teorema: Sotto certe condizioni (partecipanti neutrali al rischio, valori privati indipendenti), tutti i meccanismi che:

1. Allocano efficientemente
2. Danno utilità zero al tipo più basso

generano lo stesso ricavo atteso.

Applicazione limitata alle lotterie: Le lotterie NON allocano efficientemente (allocazione casuale, non al miglior valutatore).

30.3 Aste vs Lotterie

Confronto formale:

- **Asta:** vincitore = massimo valutatore (efficiente)
- **Lotteria:** vincitore = casuale (inefficiente)

Ricavo atteso:

- **Asta primo prezzo:** $E[R_{\text{auction}}] = E[\text{secondo valore più alto}]$
- **Lotteria:** $E[R_{\text{lottery}}] = n \cdot P \cdot C$

Quando le lotterie generano più ricavo: Se $n \cdot P \cdot C > E[\text{secondo valore più alto}]$

Questo accade quando ci sono molti partecipanti con basse valutazioni disposte a "provare la fortuna" ma che non farebbero offerte competitive in asta.

31. Neuroscienze ed Economia Sperimentale

31.1 Base Neurale del Comportamento di Gioco

Aree cerebrali coinvolte:

- **Nucleus accumbens:** anticipazione della ricompensa
- **Corteccia prefrontale ventromediale:** valutazione del valore
- **Amigdala:** elaborazione emotiva del rischio
- **Corteccia cingolata anteriore:** monitoraggio errori

Attivazione durante "quasi-vincite": L'attività del nucleus accumbens è simile sia per vincite che per quasi-vincite, spiegando perché sono rinforzanti.

Rilascio di dopamina: Picco durante anticipazione > durante vincita effettiva

Modello formale (Reward Prediction Error): $\delta \square = R(t) - V(t)$

dove:

- $\delta \square$ = segnale dopaminergico
- $R(t)$ = ricompensa ricevuta
- $V(t)$ = ricompensa attesa

31.2 Esperimenti di Laboratorio

Design sperimentale tipico:

- Soggetti: $n = 50-200$
- Task: scelta ripetuta tra lotteria e importo certo
- Manipolazioni: probabilità, premi, framing

Misure:

- Proporzione di scelte rischiose
- Tempo di reazione
- Parametri stimati di utilità/ponderazione

Risultati robusti:

1. Violazione EUT (Expected Utility Theory)
2. Effetto certezza
3. Effetto riflesso
4. Effetto isolamento
5. Sovrastima di p piccole, sottostima di p grandi

31.3 Modelli Computazionali di Scelta

Drift-Diffusion Model: Processo di accumulazione di evidenza verso una soglia decisionale.

$$dX(t) = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW(t)$$

Decisione quando $X(t)$ raggiunge $\pm a$ (soglie).

Parametri:

- μ = drift rate (qualità dell'evidenza)
- σ = rumore diffusivo
- a = threshold (cautela)

Tempo di decisione: $E[T] = (a/\mu) \cdot \tanh(\mu a/\sigma^2)$

Applicazione: Tempi di decisione più lunghi per scelte difficili (probabilità ambigue, premi simili).

32. Aspetti Legali e Regolamentari

32.1 Teoria della Regolazione Ottimale

Trade-off fondamentale:

- **Beneficio:** entrate per stato, finanziamento beni pubblici
- **Costo:** esternalità negative (gioco problematico, regressività)

Benessere sociale: $W = B(R) - C(n, \theta)$

dove:

- R = ricavi statali
- n = numero giocatori
- θ = distribuzione tipi (vulnerabilità)

Regolazione ottimale: max W soggetto a vincoli costituzionali/etici

Strumenti:

1. Tassazione (aliquota ottimale)
2. Limiti di spesa
3. Restrizioni pubblicitarie
4. Programmi di prevenzione

32.2 Analisi Costi-Benefici

Benefici quantificabili:

- Entrate fiscali: E
- Utilità entertainment per giocatori: U_{ent}
- Esternalità positive: E_{pos} (es. finanziamento cultura)

Costi quantificabili:

- Perdite economiche dei giocatori: L
- Costi sociali gioco problematico: C_{prob}
- Deadweight loss da tassazione implicita: DWL
- Costi amministrativi: A

Surplus netto sociale: $NSS = (E + U_{ent} + E_{pos}) - (L + C_{prob} + DWL + A)$

Condizione di desiderabilità sociale: $NSS > 0$

Studi empirici: Risultati misti; dipende fortemente da:

- Valutazione di U_{ent}
- Stima di C_{prob} (molto incerta)
- Controfattuale (cosa accadrebbe senza lotteria statale)

32.3 Economia del Crimine e Lotterie

Ipotesi di sostituzione: Le lotterie legali riducono lotterie illegali?

Modello: Domanda totale di gioco: $D_{tot} = D_{leg}(P_{leg}, Q_{leg}) + D_{illeg}(P_{illeg}, Q_{illeg})$

Se D_{leg} aumenta, D_{illeg} diminuisce (beni sostituiti).

Evidenza empirica: Effetto di sostituzione parziale (elasticità incrociata $\approx 0.2-0.4$).

33. Estensioni Stocastiche Avanzate

33.1 Processi di Lévy

Definizione: Un processo $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ è un processo di Lévy se:

1. $X(0) = 0$
2. Incrementi indipendenti
3. Incrementi stazionari
4. Continuo in probabilità

Rappresentazione Lévy-Khintchine: La funzione caratteristica: $E[e^{iuX(t)}] = \exp(t \cdot \psi(u))$

dove: $\psi(u) = i\gamma u - (\sigma^2 u^2)/2 + \int (e^{iux} - 1 - iux \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}) \nu(dx)$

ν = misura di Lévy (descrive i salti)

Modello per capitale del giocatore: $S(t) = S_0 + \mu t + \sigma W(t) + \sum_i Y_i \mathbf{1}_{\{T_i \leq t\}}$

- μt = deriva (perdita sistematica)
- $\sigma W(t)$ = variazione continua
- $\sum$ salti = vincite occasionali

33.2 Opzioni su Lotterie

Contratto derivato ipotetico: Opzione call sul jackpot: diritto (non obbligo) di giocare quando $J > K$ (strike).

Valutazione Black-Scholes (adattato): Assumendo J segue moto browniano geometrico:
 $dJ = \mu J dt + \sigma J dW$

Prezzo opzione: $C = e^{-rT}[J_0 N(d_1) - KN(d_2)]$

dove: $d_1 = [\ln(J_0/K) + (\mu + \sigma^2/2)T] / (\sigma\sqrt{T})$ $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Problema: Il valore dell'opzione è sempre positivo, ma il valore atteso di giocare è negativo. Contraddizione?

Risoluzione: Il prezzo dell'opzione riflette il valore di poter scegliere quando giocare (flessibilità), non il valore atteso del gioco stesso.

33.3 Analisi di Sensibilità (Greeks)

Delta: $\partial C/\partial J$ (sensibilità al jackpot) **Gamma:** $\partial^2 C/\partial J^2$ (convessità) **Vega:** $\partial C/\partial \sigma$ (sensibilità alla volatilità) **Theta:** $\partial C/\partial T$ (decadimento temporale)

Per l'opzione sulla lotteria:

- Delta > 0 (aumenta con jackpot)
- Gamma > 0 (convessa)
- Vega > 0 (più volatilità = più valore all'opzione)

34. Meta-Analisi e Sintesi Empirica

34.1 Revisione Sistemática della Letteratura

Metodologia:

1. Identificazione studi (database: EconLit, PubMed, Google Scholar)
2. Criteri di inclusione/esclusione
3. Estrazione dati
4. Analisi quantitativa aggregata

Parametri chiave da meta-analisi:

Valore atteso (payout %):

- Media ponderata: 56.3% (95% CI: [52.1%, 60.5%])
- Eterogeneità: $I^2 = 87\%$ (alta)

Elasticità della domanda al jackpot:

- Media: 0.38 (95% CI: [0.31, 0.45])
- Eterogeneità: $I^2 = 72\%$ (moderata-alta)

Prevalenza gioco problematico:

- Lotterie: 2.1% (95% CI: [1.7%, 2.5%])
- Vs altri giochi: slot 6.2%, poker 4.8%

34.2 Forest Plot dell'Effetto sulla Diseguaglianza

Misurazione: Effetto sulle lotterie sul coefficiente di Gini.

Modello meta-analitico: $\theta = \sum_i w_i \theta_i / \sum_i w_i$

dove:

- θ_i = effetto stimato nello studio i
- $w_i = 1/SE^2_i$ (peso)

Risultato aggregato: Incremento medio del Gini: +0.008 (95% CI: [0.004, 0.012])

Interpretazione: le lotterie aumentano leggermente ma significativamente la disuguaglianza.

34.3 Bias di Pubblicazione

Funnel plot: Grafico effect size vs precision

Test di Egger: Regressione: $t\text{-value} = \beta_0 + \beta_1 \cdot (1/SE) + \varepsilon$

Se $\beta_0 \neq 0$ significativamente, evidenza di bias.

Correzione Trim-and-Fill: Imputa studi "mancanti" per simmetrizzare il funnel plot.

Risultato: Moderato bias di pubblicazione; effetto reale probabilmente leggermente inferiore a quello pubblicato.

35. Frontiere della Ricerca

35.1 Blockchain e Lotterie Decentralizzate

Smart contract per lotterie verificabili:

solidity

```
contract ProvablyFairLottery {
    uint256 public randomSeed;
    function draw() public {
        randomSeed = uint256(keccak256(
            abi.encodePacked(block.timestamp, block.difficulty, msg.sender)
        ));
        uint256 winner = randomSeed % totalTickets;
        // distribute prize
    }
}
```

Vantaggio: Trasparenza completa, impossibilità di manipolazione.

Sfida: Generazione di vera casualità on-chain (oracoli necessari).

35.2 Machine Learning per Rilevamento Gioco Problematico

Features predittive:

- Frequenza di gioco
- Ammontare speso
- Variazione temporale nel comportamento
- Pattern temporali (gioco notturno)
- Velocità di escalation

Modello random forest: $P(\text{problematico}) = f(X; \theta)$

dove X = vettore features, θ = parametri del modello.

Performance:

- AUC-ROC: 0.78-0.85
- Sensitivity: 72%
- Specificity: 81%

Intervento: Sistema di early warning per intervento preventivo.

35.3 Quantum Random Number Generation

QRNGs per lotterie ultra-sicure: Basati su processi quantistici intrinsecamente casuali (es. decadimento radioattivo, splitting fotoni).

Vantaggio: Casualità certificata dalla fisica quantistica, non generata alitmicamente.

Teorema di Bell: Nessuna teoria a variabili nascoste locali può riprodurre predizioni quantistiche.

Implica: i risultati sono genuinamente casuali, non deterministici-ma-ignoti.

Implementazione: QRNG commerciali disponibili (ID Quantique, QuintessenceLabs).

36. Sintesi Filosofica Finale

36.1 Epistemologia della Probabilità

Tre interpretazioni:

1. Frequentista: $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} N_A(n)/n$

Problemi: eventi unici, interpretazione di $p = 0$

2. Bayesiana soggettiva: $P(A) = \text{grado di credenza razionale}$

Vantaggio: applicabile a qualsiasi proposizione

3. Propensione (Popper): $P(A)$ = tendenza fisica del sistema a produrre A

Per le lotterie: Tutte e tre concordano sulle probabilità (caso semplice), ma differiscono sull'interpretazione filosofica.

36.2 Razionalità e Paradossi

Razionalità procedurale vs sostantiva:

- **Procedurale:** seguire processo decisionale corretto
- **Sostantiva:** raggiungere obiettivo desiderato

Paradosso: Giocare alla lotteria può essere proceduralmente razionale (massimizza utilità soggettiva includendo entertainment) ma sostantivamente irrazionale (perdita monetaria attesa).

Risoluzione: La razionalità dipende dalla specificazione completa della funzione obiettivo. Se $U = U(\text{money}, \text{entertainment}, \text{hope})$, allora giocare può essere razionale.

36.3 Etica della Probabilità

Dovere epistemic: Gli agenti hanno dovere morale di formare credenze accurate?

Argomento consequenzialista: Sì, perché credenze false portano a decisioni sub-ottimali e danno.

Applicazione: Gli operatori di lotterie hanno dovere morale di:

1. Comunicare chiaramente le probabilità
2. Non sfruttare bias cognitivi deliberatamente
3. Implementare protezioni per vulnerabili

Tensione: Vs obiettivo di massimizzare ricavi.

37. Teoria dell'Efficienza Paretiana e Lotterie

37.1 Fondamenti della Pareto Ottimalità

Definizione (Pareto Efficienza): Un'allocazione x è Pareto efficiente se non esiste un'altra allocazione y tale che:

- $U_i(y) \geq U_i(x)$ per ogni agente i
- $U_j(y) > U_j(x)$ per almeno un agente j

In altre parole, nessun miglioramento di Pareto è possibile.

Definizione (Miglioramento di Pareto): Un passaggio da x a y è un miglioramento di Pareto se:

- Nessuno sta peggio: $U_i(y) \geq U_i(x) \quad \forall i$
- Almeno uno sta meglio: $\exists j : U_j(y) > U_j(x)$

Primo Teorema Fondamentale dell'Economia del Benessere: Ogni equilibrio competitivo è Pareto efficiente (sotto condizioni standard).

Secondo Teorema Fondamentale: Ogni allocazione Pareto efficiente può essere supportata come equilibrio competitivo (con redistribuzione appropriata dei dotazioni iniziali).

37.2 Le Lotterie sono Pareto Inefficienti?

Teorema (Inefficienza Ex-Post delle Lotterie): Considera una lotteria con n giocatori, ciascuno paga C , un vincitore riceve P , dove $P < n \cdot C$ (margine della casa).

Ex-post (dopo l'estrazione):

- Vincitore: utilità $U(W_0 + P - C)$
- Perdenti: utilità $U(W_0 - C)$

Allocazione alternativa Pareto superiore: Redistribuire il montepremi totale $n \cdot C$ equamente:

- Tutti ricevono: utilità $U(W_0)$

Questa allocazione è strettamente Pareto superiore perché:

- $U(W_0) > (1/n) \cdot U(W_0 + P - C) + ((n-1)/n) \cdot U(W_0 - C)$

per utilità concava e $P < n \cdot C$.

Dimostrazione formale: Per concavità di U : $U(E[\text{ricchezza}]) \geq E[U(\text{ricchezza})]$

Consideriamo ricchezza attesa nella lotteria: $E[W] = (1/n) \cdot (W_0 + P - C) + ((n-1)/n) \cdot (W_0 - C) = W_0 + P/n - C < W_0$ (perché $P < n \cdot C$)

Allocazione di certezza W_0 per tutti dà: $U(W_0) > U(W_0 + P/n - C) \geq (1/n) \cdot U(W_0 + P - C) + ((n-1)/n) \cdot U(W_0 - C)$

Quindi l'allocazione certa Pareto-domina l'allocazione stocastica. ■

37.3 Paradosso: Perché Esistono le Lotterie?

Risoluzione 1: Preferenze per il Rischio Se alcuni agenti sono risk-loving ($U'' > 0$), potrebbero preferire la lotteria.

Ma empiricamente la maggioranza è risk-averse, quindi questa spiegazione è insufficiente.

Risoluzione 2: Utilità del Processo La funzione di utilità corretta è: $U = U(\text{ricchezza}, \text{esperienza}_{\text{gioco}})$

La lotteria fornisce $u_{\text{esperienza}} > 0$, quindi: $U(W_{\text{lotteria}}, \text{esperienza})$ potrebbe $> U(W_{\text{certo}}, \text{no}_{\text{esperienza}})$

Risoluzione 3: Eterogeneità delle Preferenze Diversi agenti hanno diverse valutazioni:

- Tipo A: alta utilità da esperienza $\rightarrow$ gioca
- Tipo B: bassa utilità da esperienza $\rightarrow$ non gioca

Equilibrio con partecipazione volontaria può essere Pareto efficiente dato il vincolo di partecipazione.

Teorema (Efficienza con Partecipazione Volontaria): Se la partecipazione è volontaria e gli agenti hanno informazione completa, l'equilibrio in cui alcuni giocano e altri no può essere Pareto efficiente nel set delle allocazioni fattibili.

Dimostrazione: Supponiamo per assurdo che esista un miglioramento di Pareto.

- I giocatori attuali devono stare almeno altrettanto bene $\rightarrow$ la nuova allocazione deve offrire loro almeno $U(\text{gioco})$
- I non-giocatori devono stare almeno altrettanto bene $\rightarrow$ devono rimanere non-giocatori (rivelazione preferenze)
- Ma allora l'allocazione è identica a quella esistente. Contraddizione. ■

37.4 Frontiera di Pareto con Rischio

Insieme delle allocazioni fattibili: Con n agenti e ricchezza totale $W_{\text{tot}} = n \cdot W_0$:

$$A = \{(w_1, \dots, w_n) : \sum_i w_i = W_{\text{tot}}, w_i \geq 0\}$$

Frontiera di Pareto in certezza: Tutti i punti in A sono potenzialmente Pareto efficienti (dipende dalle utilità).

Con allocazioni stocastiche: $A_{\text{stocastico}} = \{\text{distribuzioni di probabilità su allocazioni deterministiche}\}$

Teorema (Espansione della Frontiera): Se almeno un agente è risk-loving, la frontiera di Pareto si espande: $\text{Pareto}_{\text{stocastico}} \supset \text{Pareto}_{\text{certo}}$

Ma se tutti sono risk-averse: $\text{Pareto}_{\text{stocastico}} = \text{Pareto}_{\text{certo}}$

Implicazione per lotterie: Con risk-aversion universale, le lotterie giuste ($E[V]=0$) stanno sulla frontiera di Pareto, ma le lotterie con margine ($E[V]<0$) sono all'interno (sub-ottimali).

37.5 Criterio di Kaldor-Hicks

Definizione (Efficienza di Kaldor-Hicks): Un cambiamento è efficiente secondo Kaldor-Hicks se i vincitori potrebbero compensare i perdenti e rimanere comunque meglio.

Formalmente: $\sum_i \Delta U_i > 0$ (in termini monetari)

Applicazione alle lotterie: Consideriamo l'introduzione di una lotteria statale:

Vincitori:

- Stato: +R (ricavi netti)
- Giocatori con alta $u_{\text{esperienza}}$: +surplus

Perdenti:

- Giocatori con bassa $u_{\text{esperienza}}$: -perdite
- Esternalità negative: -C_sociale

Test di Kaldor-Hicks: $R + \sum_{\text{vincitori}} \text{surplus} > \sum_{\text{perdenti}} \text{perdite} + C_{\text{sociale}} ?$

Evidenza empirica mista: Alcuni studi: passa il test (benefici > costi) Altri studi: fallisce (costi sociali sottovalutati)

37.6 Efficienza Allocativa vs Efficienza Distributiva

Distinzione cruciale:

Efficienza allocativa: Risorse allocate a usi più produttivi/valutati

Efficienza distributiva: Considerazioni di equità nella distribuzione

Le lotterie sono:

- Potenzialmente efficienti allocativamente (se volontarie e informate)
- Problematiche distributivamente (regressive)

Secondo Teorema del Benessere: Si potrebbero raggiungere obiettivi distributivi tramite trasferimenti lump-sum invece di distorcere il meccanismo della lotteria.

Ma in pratica: i trasferimenti lump-sum sono politicamente/amministrativamente difficili.

38. Teoria delle Aste e Meccanismi Alternativi

38.1 Confronto Formale: Asta vs Lotteria

Setup: n agenti, valutazioni private $v_i \sim F[0, \bar{v}]$, un premio indivisibile.

Meccanismo 1 - Asta al Secondo Prezzo (Vickrey):

- Ogni agente dichiara b_i
- Vincitore: $i^* = \arg \max_i b_i$
- Paga: $\max_{\{j \neq i^*\}} b_j$

Proprietà:

- Strategia dominante: $b_i = v_i$ (dire la verità)
- Allocazione efficiente: premio va a chi lo valuta di più
- Ricavo atteso: $E[\text{secondo valore più alto}]$

Meccanismo 2 - Lotteria:

- Ogni agente compra biglietti a prezzo P
- Probabilità di vincita: $\pi_i = n_i / \sum_j n_j$
- Vincitore estratto casualmente

Proprietà:

- Strategia: dipende da avversione al rischio e budget
- Allocazione inefficiente: premio può andare a chi lo valuta meno
- Ricavo atteso: $P \cdot \sum_i n_i$

Teorema (Superiorità dell'Asta in Efficienza): L'asta Vickrey Pareto-domina la lotteria quando:

1. Agenti risk-neutral o risk-averse
2. Obiettivo è efficienza allocativa
3. Premio ha valore d'uso (non solo monetario)

Dimostrazione: Nell'asta, premio va a i^* con $v_{i^*} = \max_i v_i$ Surplus sociale: $S_{asta} = v_{i^*}$

Nella lotteria, premio va a i con probabilità π_i Surplus sociale atteso: $S_{lotteria} = \sum_i \pi_i \cdot v_i \leq \max_i v_i = S_{asta}$

Con disuguaglianza stretta se $\pi_{i^*} < 1$. ■

38.2 Quando le Lotterie Dominano le Aste

Caso 1: Obiettivo di Massimizzare la Partecipazione

Se l'obiettivo è coinvolgere il maggior numero di persone (es. per awareness, engagement):

Lotteria: $n_{lotteria} >> n_{asta}$

Perché: barriera all'ingresso bassa (costo fisso piccolo)

Asta: Solo agenti con v_i sufficientemente alto partecipano

Teorema: Se utility sociale $W = f(n_{partecipanti})$, $\partial f / \partial n > 0$, allora esiste P^* tale che: $W(\text{lotteria con } P^*) > W(\text{asta})$

Caso 2: Asimmetria Informativa Severa

Quando gli agenti non conoscono le proprie valutazioni: v_i sconosciuto anche a i

Lotteria: Fornisce signal-jamming, riduce adverse selection

Asta: Può portare a winner's curse severo

Caso 3: Considerazioni di Equità

Se esiste vincolo: ogni agente deve avere probabilità minima $\pi_{\min} > 0$

Lotteria: Naturalmente soddisfa questo vincolo

Asta: Concentra tutto il surplus sul vincitore

38.3 Meccanismi Ibridi

All-Pay Auction:

- Tutti pagano la propria offerta
- Solo il più alto vince

Proprietà intermedie:

- Genera più ricavo dell'asta standard
- Più efficiente della lotteria pura
- Applicazioni: lobbying, R&D races

Ricavo atteso: $E[R_{\text{all-pay}}] = E[\sum_i b_i] > E[R_{\text{standard}}] = E[\max_i v_i - \text{secondo max}]$

Lotteria Ponderata (Tullock Contest): Probabilità di vincita: $\pi_i(b) = b_i^r / \sum_j b_j^r$

dove $r \geq 0$ è il parametro di discriminazione:

- $r = 0$: lotteria pura (non dipende da b_i)
- $r = 1$: lotteria proporzionale
- $r \rightarrow \infty$: asta deterministica

Teorema (Equivalenza nel Limite): $\lim_{r \rightarrow \infty}$ equilibrio Tullock = equilibrio all-pay auction

38.4 Mechanism Design con Lotterie

Problema del Principal: Designer sceglie meccanismo M per massimizzare obiettivo Φ soggetto a vincoli.

Spazio dei meccanismi: $M = (\text{allocazione}, \text{pagamenti})$

dove allocazione può essere stocastica.

Revelation Principle: Ogni meccanismo può essere rappresentato come meccanismo diretto truthful.

Per lotterie: Meccanismo diretto: agenti dichiarano $\hat{v}_i$, designer sceglie probabilità $\pi_i(\hat{v})$ e pagamenti $t_i(\hat{v})$.

Vincolo IC (Incentive Compatibility): $v_i \cdot \pi_i(v_i, \hat{v}_{-i}) - t_i(v_i, \hat{v}_{-i}) \geq v_i \cdot \pi_i(\hat{v}_i, \hat{v}_{-i}) - t_i(\hat{v}_i, \hat{v}_{-i}) \quad \forall \hat{v}_i$

Vincolo IR (Individual Rationality): $v_i \cdot \pi_i(v) - t_i(v) \geq 0$

Teorema (Myerson): Il meccanismo ottimale risolve: $\max_{\{\pi, t\}} E[\sum_i t_i]$ soggetto a IC, IR

Soluzione: allocazione distorta verso agenti con alta "virtual valuation" $\phi_i(v_i) = v_i - (1-F(v_i))/f(v_i)$

Lotterie come meccanismo sub-ottimale: Le lotterie standard non implementano la soluzione di Myerson (eccetto casi speciali).

39. Teoria dei Contratti e Assicurazioni Inverse

39.1 Lotterie come Contratti di Assicurazione Inversa

Assicurazione tradizionale:

- Agente risk-averse paga premio π
- Riceve pagamento P se evento negativo E
- Trasforma incertezza in certezza (per prezzo)

Lotteria:

- Agente paga C
- Riceve P se evento positivo W (vincita)
- Trasforma certezza in incertezza (acquista rischio)

Paradosso apparente: Perché agenti risk-averse acquistano lotterie (aumentano rischio) ma anche assicurazioni (riducono rischio)?

Risoluzione (Friedman-Savage):

Funzione di utilità con forma S:

$U(w)$ concava per $w < w^*$

$U(w)$ convessa per $w^* < w < w^{**}$

$U(w)$ concava per $w > w^{**}$

Agenti a $w_0 < w^*$ sono risk-averse localmente ma risk-seeking per grandi guadagni che li porterebbero a $w > w^*$.

Matematicamente: $U''(w_0) < 0$ (concava localmente) Ma: $U(w_0 + P - C) - U(w_0 - C) > 0$ per P grande

perché $U(w_0 + P - C)$ è nella regione convessa.

39.2 Teoria del Principal-Agent con Lotterie

Setup:

- Principal (operatore lotteria) offre contratto
- Agent (giocatore) sceglie sforzo $e \geq 0$
- Output: probabilità di evento favorevole $p(e)$
- Costo dello sforzo: $c(e)$

Problema del Principal: $\max_{\{w,e\}} p(e) \cdot (R - w) - (1-p(e)) \cdot 0$ soggetto a:

- IC: $e \in \arg \max_{\{\hat{e}\}} p(\hat{e}) \cdot U(w) - c(\hat{e})$
- IR: $p(e) \cdot U(w) - c(e) \geq \bar{U}$

Teorema (Implementazione del First-Best): Il first-best è implementabile solo se l'azione è osservabile o se l'agente è risk-neutral.

Per lotterie: Non c'è vera azione dell'agente (outcome puramente stocastico), quindi problema semplificato.

Ma: se interpretato come "quante risorse dedicare a cercare numeri fortunati", emerge moral hazard.

39.3 Selezione Avversa nei Mercati delle Lotterie

Informazione asimmetrica: Agenti conoscono la propria propensione al gioco problematico; operatore no.

Tipi:

- Tipo H (high risk): alta probabilità di diventare dipendenti
- Tipo L (low risk): bassa probabilità

Problema: Se l'operatore offrisse contratto ottimale per tipo L, tipo H lo accetterebbe anche (pooling).

Equilibrio separatore: Offrire due contratti $\{C_H, P_H\}$, $\{C_L, P_L\}$ tali che:

- Tipo H preferisce $\{C_H, P_H\}$
- Tipo L preferisce $\{C_L, P_L\}$

Condizioni: $U_H(C_H, P_H) \geq U_H(C_L, P_L)$ $U_L(C_L, P_L) \geq U_L(C_H, P_H)$

Risultato tipico: Tipo L ottiene contratto sub-ottimale (distorsione verso il basso) per separazione.

Implementazione reale: Limiti di spesa, cooling-off periods, auto-esclusione → strumenti di screening/segnalazione.

40. Teoria del Benessere Sociale e Funzioni di Benessere

40.1 Funzioni di Benessere Sociale

Funzione di Bergson-Samuelson: $W = W(U_1, U_2, \dots, U_n)$

Proprietà desiderabili:

1. Paretianità: $\partial W / \partial U_i > 0$ (più utilità individuale aumenta W)
2. Simmetria: W invariante a permutazioni (anonimato)
3. Continuità

Forme funzionali comuni:

Utilitarismo (Bentham): $W_U = \sum_i U_i$

Utilitarismo generalizzato: $W_\alpha = \sum_i U_i^\alpha / \alpha$ per $\alpha \leq 1$

Rawlsiano (maximin): $W_R = \min_i U_i$

Nash: $W_N = \prod_i U_i$

40.2 Valutazione delle Lotterie secondo Criteri di Benessere

Utilitarismo: $W_U(\text{lotteria}) = E[\sum_i U_i] = \sum_i E[U_i]$

Se $E[U_i] < U_i(\text{status quo})$ per tutti i i (risk-aversion): $W_U(\text{lotteria}) < W_U(\text{status quo})$

Conclusione utilitarista: Lotterie riducono benessere se gli agenti sono risk-averse e $E[V] < 0$.

Eccezione: Se alcuni agenti derivano utilità dal processo: $U_i = U_i(\text{ricchezza, esperienza})$

Allora possibile $W_U(\text{lotteria}) > W_U(\text{status quo})$ se l'utilità dell'esperienza compensa.

Rawlsiano: $W_R(\text{lotteria}) = \min_i E[U_i]$

Tipicamente il minimo è il perdente più sfortunato: $W_R = U(W_0 - C - \text{altri_costi})$

Confronto con status quo: $W_R(\text{lotteria}) < W_R(\text{status quo}) = \min_i U_i(W_0)$

Conclusione rawlsiana: Le lotterie peggiorano sempre la posizione del peggio-stante $\rightarrow$ inaccettabili.

Critica: Troppo severo; ignora consenso volontario e utilità dell'esperienza.

40.3 Teorema di Impossibilità di Arrow

Teorema: Non esiste funzione di benessere sociale W che soddisfi simultaneamente:

1. Dominio illimitato
2. Paretianità debole
3. Indipendenza dalle alternative irrilevanti
4. Non-dittatura

Implicazione per policy sulle lotterie: Non esiste ordinamento sociale "oggettivo" delle alternative (consentire vs vietare lotterie).

Diverse funzioni di benessere portano a conclusioni diverse:

- Utilitarismo → ambiguo (dipende da parametri)
- Rawlsiano → contro lotterie
- Libertariano → pro lotterie (libertà di scelta)

Necessità di giudizi di valore: La scelta non può essere puramente tecnica; richiede posizione normativa su libertà vs paternalismo.

41. Economia Comportamentale Avanzata e Nudging

41.1 Architettura delle Scelte

Nudge (Thaler & Sunstein): Modifiche del contesto decisionale che alterano comportamento senza vietare opzioni o cambiare incentivi economici.

Applicazioni alle lotterie:

1. Default options:

- Default: non iscritto → richiede opt-in attivo
- vs Default: iscritto → richiede opt-out attivo

Evidenza: l'opt-out aumenta partecipazione del 30-40%.

2. Framing effects:

- "Perdi €1" vs "Costa €1"
- "Probabilità di vincere: 0.0000001%" vs "Una possibilità su 10 milioni"

3. Salience manipulation:

- Rendere probabilità visibili vs nascoste
- Mostrare costo cumulativo annuale vs per biglietto

4. Commitment devices:

- Pre-impegno a limiti di spesa
- "Cooling-off periods" obbligatori

41.2 Modello Duale: Sistema 1 vs Sistema 2

Sistema 1 (Kahneman):

- Veloce, automatico, emotivo
- Usa euristiche
- Propenso a bias

Sistema 2:

- Lento, deliberativo, razionale
- Usa calcolo esplicito
- Richiede effort cognitivo

Le lotterie sfruttano Sistema 1:

- Appeal emotivo (sogno di ricchezza)
- Euristiche della disponibilità (storie di vincitori)
- Sovrastima di probabilità piccole

Interventi per attivare Sistema 2:

- Richiedere calcolo esplicito del valore atteso
- Mostrare confronti con alternative
- "Friction" decisionale (questionari prima dell'acquisto)

41.3 Iperbolic Discounting e Problemi di Auto-Controllo

Sconto esponenziale (standard): $U(c_0, c_1, \dots, c_T) = \sum_{t=0}^T \delta^t u(c_t)$

con $\delta \in (0,1)$ costante.

Sconto iperbolico (realistico): $U = u(c_0) + \beta \sum_{t=1}^T \delta^t u(c_t)$

con $\beta < 1$ (present bias).

Inconsistenza temporale: Al tempo 0: preferisce {non giocare oggi, non giocare domani} Al tempo 1: preferisce {giocare oggi}

Modello di sophistication vs naiveté:

Sophisticate: Conosce il proprio β , prevede deviazione futura, usa commitment.

Naive: Crede $\beta = 1$, sorpreso quando devia, non usa commitment.

Implicazione: I naive sono più vulnerabili allo sfruttamento da parte delle lotterie.

Policy: Fornire commitment devices aiuta i sophisticated; regolazione paternalistica necessaria per i naive.

41.4 Temptation e Costi di Auto-Controllo

Modello Gul-Pesendorfer: $U(A) = \max_{x \in A} [u(x) + v(x)] - \max_{y \in A} v(y)$

dove:

- $u(x)$ = utilità "normativa" (cosa dovrebbe scegliere)
- $v(x)$ = utilità "tentazione" (cosa vuole scegliere)
- Secondo termine = costo di auto-controllo

Per lotterie: $u(\text{non giocare}) > u(\text{giocare})$ (razionalmente meglio) $v(\text{giocare}) > v(\text{non giocare})$ (tentazione)

Se lotteria disponibile: $U(\{\text{giocare}, \text{non giocare}\}) = u(\text{non giocare}) - [v(\text{giocare}) - v(\text{non giocare})]$

Costo dell'auto-controllo riduce utilità anche se alla fine non gioca!

Preferenza per l'impegno: $U(\{\text{non giocare}\}) > U(\{\text{giocare}, \text{non giocare}\})$

Agente preferisce rimuovere opzione tentante.

Giustificazione per regolazione: Anche agenti con auto-controllo perfetto beneficiano da rimozione dell'opzione.

42. Dinamiche Evolutive e Game Theory Evoluzionistica

42.1 Evolutionary Stable Strategies

Setup: Popolazione di agenti con strategie $\{s_1, \dots, s_n\}$ Fitness: $f(s_i, s_j)$ = payoff di s_i contro s_j

Strategia Evolutivamente Stabile (ESS): s^* è ESS se per ogni $s \neq s^*$:

- $f(s^*, s^*) > f(s, s^*)$, oppure
- $f(s^*, s^*) = f(s, s^*)$ e $f(s^*, s) > f(s, s)$

Dinamica replicatore: $\dot{x}_i = x_i \cdot [f(s_i, \bar{x}) - \bar{f}(x)]$

dove:

- x_i = frequenza strategia i
- $\bar{f}(x) = \sum_j x_j f(s_j, \bar{x})$ = fitness media

Applicazione alle lotterie:

Strategie:

- s_G = "gioca sempre"
- s_N = "non gioca mai"

- $s_C = \text{"gioca condizionalmente" (se jackpot} > \text{soglia)}$

Fitness: $f(s_G, \text{popolazione}) = W_0 + E[V_{\text{gioco}}] < W_0$ $f(s_N, \text{popolazione}) = W_0$ $f(s_C, \text{popolazione}) = W_0 + \text{prob}_{\text{soglia}} \cdot E[V \mid \text{soglia}]$

Teorema: Se $E[V] < 0$ sempre, s_N è ESS.

Ma: se esiste valore non-monetario $u_{\text{esperienza}}$: $f(s_G) = W_0 + E[V] + u_{\text{esperienza}}$

Se $u_{\text{esperienza}} > |E[V]|$, allora s_G può essere ESS.

42.2 Evoluzione Culturale delle Credenze

Trasmissione verticale: Genitori $\rightarrow$ figli: "giocare è divertente/dispensitoso"

Trasmissione orizzontale: Peers $\rightarrow$ individuo: influenza sociale

Modello: $p_{t+1} = (1-\mu) \cdot [\alpha p_t + \beta \cdot \text{influenza}_{\text{sociale}}] + \mu \cdot \text{mutation}$

Equilibrio: $p^* = [\beta \cdot s + \mu \cdot m] / [1 - \alpha(1-\mu)]$

dove:

- s = influenza sociale (media popolazione)
- m = rate di mutation (nuove credenze)

Fenomeno: Anche con $E[V] < 0$ oggettivo, credenze "giocare è buono" possono persistere se:

- Trasmissione culturale forte (α alto)
- Influenza sociale positiva (vincitori visibili)
- Mutation verso credenze pro-gioco (marketing)

42.3 Multi-Level Selection

Selezione a livello individuale: Non giocare domina giocare (maggior ricchezza).

Selezione a livello di gruppo: Gruppi con giocatori contribuiscono a beni pubblici (via tasse su lotterie) $\rightarrow$ vantaggio di gruppo?

Condizione per selezione di gruppo: Beneficio al gruppo $>$ costo individuale

$B_{\text{gruppo}} / n_{\text{gruppo}} > C_{\text{individuale}}$

Per lotterie: Ricavi reinvestiti in beni pubblici: R_{gruppo} Costo per giocatore: $C_{\text{giocatore}}$

Se $R_{\text{gruppo}} / n_{\text{gruppo}} > C_{\text{giocatore}}$, possibile evoluzione cooperativa del "giocare" come norma sociale.

Critica: Richiede assunzioni forti su structure dei gruppi e migrazione limitata.

43. Aspetti Computazionali e Complessità Algoritmica

43.1 Complessità del Winner Determination Problem

Problema: Data struttura di lotteria complessa (con regole condizionali), determinare vincitori.

Input:

- Set di giocate $S = \{g_1, \dots, g_m\}$
- Estrazione E
- Regole R

Output:

- Lista vincitori e premi

Complessità:

- Caso semplice (matching diretto): $O(m)$
- Con regole bonus/condizionali: $O(m \cdot k)$ dove k = numero regole
- Con dipendenze tra premi: può essere NP-hard

Esempio NP-hard: Se esistono vincoli: "premio X assegnato solo se premio Y non è assegnato a stesso giocatore" $\rightarrow$ Riduzione da SAT

43.2 Algoritmi di Ottimizzazione per Acquisto di Biglietti

Problema del sindacato: Dato budget B , scegliere insieme S di combinazioni per massimizzare:

- Probabilità di almeno una vincita, o
- Valore atteso del premio, o
- Probabilità di vincere categoriacondizionale

Problema di copertura: max-cover: Coprire massimo numero di possibili estrazioni con k combinazioni

Formulazione ILP: $\max \sum_j y_j$ soggetto a: $\sum_i e_j \in \text{copertura}(c_i) x_i \geq y_j \quad \forall j \quad \sum_i x_i \leq k$
 $x_i, y_j \in \{0,1\}$

Complessità: NP-hard (riduzione da Max-Cover)

Algoritmi approssimati:

Greedy (rapporto $1-1/e$):

```
S = ∅
while |S| < k:
    c* = arg max_c |nuove_estrazioni_coperte(c, S)|
```

$$S = S \cup \{c^*\}$$

Garanzia: $|\text{valore_greedy}| \geq (1 - 1/e) \cdot |\text{valore_OPT}| \approx 0.632 \cdot \text{OPT}$

Programmazione dinamica (per casi speciali):

Se la struttura ha sottoproblemi ottimali: $DP[i][b]$ = massimo valore con primi i biglietti e budget b

Complessità: $O(n \cdot B \cdot \text{valore_max})$

43.3 Machine Learning per Predizione di Patterns

Problema: Dato storico di estrazioni, predire numeri futuri?

Risposta teorica: Se la lotteria è equa, impossibile (indipendenza statistica).

Ma: rilevamento di anomalie: ML può rilevare deviazioni dalla distribuzione uniforme (frode/mal funzionamento).

Test statistico automatizzato:

Features:

- Frequenza di ogni numero
- Co-occorrenze
- Statistiche temporali
- Runs tests

Modello: Anomaly detection (One-Class SVM, Isolation Forest)

Output: $P(\text{estrazione } t \text{ è anomala} \mid \text{storia})$

Applicazione: Auditing automatico delle lotterie per garantire equità.

44. Estensioni a Lotterie Generalizzate

44.1 Continuous Lotteries

Lotteria standard: Supporto discreto finito: $\{\text{esito}_1, \dots, \text{esito}_n\}$

Lotteria continua: Distribuzione continua su $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}_+$)

Esempio: Premio $X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$

Utilità attesa: $EU = \int U(W_0 + x - C) \cdot f(x) dx$

dove f è la densità di X .

Equivalente di certezza: CE tale che: $U(W_0 + CE) = \int U(W_0 + x - C) \cdot f(x) dx$

Premio di rischio: $\pi = E[X] - C - CE$

44.2 Lotterie Multi-Attributo

Premio non monetario: Vincita = (denaro, esperienza, status sociale, ...)

Utilità multi-attributo: $U(x) = \sum_i w_i \cdot u_i(x_i)$

dove:

- x_i = valore attributo i
- u_i = funzione utilità marginale
- w_i = peso

Indipendenza additiva: Richiede preferenze separabili tra attributi.

Se violata: $U(x) = f(u_1(x_1), \dots, u_k(x_k))$

con f non additiva (es. moltiplicativa o più complessa).

Implicazione: Valutazione delle lotterie diventa più complessa: $EU = \int f(u_1(x_1), \dots, u_k(x_k)) \cdot dF(x)$

44.3 Lotterie con Informazione Parziale

Setup: Giocatore non conosce esattamente la distribuzione P , ma ha credenze Q su P .

Ambiguità (Knight uncertainty): Incertezza su incertezza.

Modello Max-Min: $U_{\maxmin} = \min_{\{P \in \Gamma\}} E_P[u(x)]$

dove Γ = set di distribuzioni plausibili.

Applicazione: Se giocatore sospetta che lotteria possa essere truccata: $\Gamma = \{P_{\text{equa}}, P_{\text{truccata}_1}, \dots, P_{\text{truccata}_k}\}$

Utilità = worst case tra questi.

Avversione all'ambiguità: Preferenza per lotterie con probabilità note vs ambigue.

Paradosso di Ellsberg: Agenti preferiscono urna con composizione nota vs ignota, anche se distribuzione attesa è identica.

45.2 Domande Aperte

Teoriche:

1. Caratterizzazione completa di quando lotterie sono Pareto-efficienti dato eterogeneità preferenze
2. Meccanismo ottimale che bilancia efficienza, equità, e libertà

3. Fondamenti assiomatici di funzioni di utilità che includono esperienza del processo

Empiriche:

1. Elasticità esatta della domanda a vari parametri (cross-country, longitudinale)
2. Causalità tra gioco alle lotterie e outcomes socio-economici
3. Efficacia di vari interventi di nudging/regolazione

Computazionali:

1. Algoritmi più efficienti per problemi NP-hard rilevanti
2. ML per detection precoce di comportamento problematico
3. Blockchain per lotterie verifiably fair e decentralizzate